UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU

PEDRO AUGUSTO DE OLIVEIRA BARBALHO

NOTAS ACERCA DA DISPUTA ENTRE O LOGICISMO DE FREGE E O INTUICIONISMO DE POINCARÉ

NITERÓI – RJ
Outubro/2020

Pedro Augusto de Oliveira Barbalho

NOTAS ACERCA DA DISPUTA ENTRE O LOGICISMO DE FREGE E O INTUICIONISMO DE POINCARÉ

Texto apresentado como requisito para conclusãode Mestrado Stricto Sensu do Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Universidade Federal Fluminense.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Gurgel.

NITERÓI – RJ
Outubro/2020

Pedro Augusto de Oliveira Barbalho

NOTAS ACERCA DA DISPUTA ENTRE O LOGICISMO

DE FREGE E O INTUICIONISMO DE POINCARÉ

Texto apresentado como requisito para conclusãode Mestrado Stricto-Sensu do Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Universidade Federal Fluminense.

Banca examinadora:

____

Prof. Dr. Diogo Gurgel (Orientador).

____

Prof. Dr. Carlos Tourinho.

____

Prof. Dr. Fernando Rodrigues.

NITERÓI – RJ
Outubro/2020

À Lyudmila Pavlichenko.

Miss Pavilichenko's well known to fame,
Russia's your country, fighting is your game,
The whole world will always love you for all time to come,
Three hundred Nazis fell by your gun.

Woody Guthrie.

AGRADECIMENTOS:

Agradeço ao coordenador do programa de pós-graduação em filosofia na UFF, Patrick Pessoa (à quem eu devo muito pela atenção e compreensão), ao meu orientador, professor Diogo Gurgel, que desde o primeiro contato se demonstrou ser um profissional exemplar da filosofia; e, também agradeço às amigas Marizete e Gitel (que são excelentes professoras de matemática).

Resumo:

Essa dissertação contextualiza obras filosóficas de Poincaré e Frege na crise dos fundamentos da matemática que ocorreu entre os séculos XIX e XXcom um objetivo final que é sopesar algumasideias de Poincaré e Frege sobre o conceito de número. Quanto ao contexto que envolve esses autores, no início do século XX, três vertentes da filosofia da matemática se consolidavam e competiam entre si: o logicismo (onde Frege se situa), formalismo, e intuicionismo (onde Poincaré se situa). Essas vertentes são então apresentadas nessa dissertação como forma de contextualizar a produção filosófica de Frege e Poincaré.

Para compreender esses dois objetivos: (1) de apresentar o contexto em que se situavam Frege e Poincaré, e também (2) de apresentar ideias importantes de ambos esses autores, que então organizei essa dissertação da seguinte maneira: no primeiro capítulo contextualizei o “renascimento" das questões fundamentais para a matemática que culminou na consolidação de três correntes adversárias da filosofia da matemática. No segundo capítulo exponho como Frege continuou uma “revolução” na fundamentação da matemática com sua concepção de número. E, no terceiro capítulo, exponho sugestões e críticas bastante sagazes que Poincaré teria dirigido à logicistas e formalistas. Nesse último capítulo, lembro também que, depois dos resultados alcançados por Gödel em 1931, as críticas e sugestões de Poincaré teriam se provado muito perspicazes.

Palavras-chave: Frege, Poincaré, fundamentação da matemática, conceito de número.

ABSTRACT

This dissertation contextualizes the work of two authors, Poincaré and Frege, in the crisis of the foundations of mathematics that occurred between the 19th and 20th centuries, and I weigh up Poincaré and Frege's ideas about the “concept of number”. As for the context surrounding these two authors, it is consensual between a wide historiography that in the early 20th century three competing philosophies of mathematics were consolidated: logicism (in which Frege stands), formalism, and intuitionism (in which Poincaré stands). These philosophies are, then, presented in this dissertation as a way to contextualize the philosophical production of Frege and Poincaré.

Understanding these two objectives: (1) to present the context in which Frege and Poincaré were, and (2) to present significant ideas of both these authors, this dissertation were organized as follows: in the first chapter I expose the "rebirth" of fundamental questions in mathematics (which also led to the consolidation of three opposing philosophies of mathematics); in the second chapter I expose how Frege maintained a revolutionary process with his conception of number; and, in the concluding chapter, I selected, and commented on, very clever suggestions and criticisms that Poincaré addressed to logicists and formalists. In this chapter, I also remember that, after the results achieved by Gödel in 1931, Poincaré's criticisms and suggestions proved to be even more perceptive.

Keywords: Frege, Poincaré, foundation of mathematics, concept of number.

Sumário

INTRODUÇÃO:

No século XIX houve uma tremenda expansão no campo da matemática. Muitos problemas fundamentais que haviam resistido longamente aos melhores esforços de pensadores antigos foram resolvidose "new areas of mathematical study were created; and in various branches of the discipline new foundations were laid, or old ones entirely recast with the help of more precise techniques of analysis" (NAGEL e NEWMAN, 2001, p.7). Nesse período, Peano promoveu uma tentativa axiomática de fundamentação dos números naturais, David Hilbert, na geometria, tornava consistentes os axiomas da geometria euclidiana[1], e, além disso, também novos paradigmas foram criados, como, por exemplo, com o avanço da geometria não euclidiana[2] que se tornava cada vez mais conhecida, principalmente depois do seu emprego na teoria da relatividade. Nesse contexto, de grandes revoluções internas no campo da matemática, Frege realizou "uma das mais perceptivas análises do conceito de número, dando os primeiros contornos daquilo que viria a ser reconhecido como o projeto logicista para a aritmética" (AGUIAR, 2010, p.187). De acordo com Zalta, Frege:

> (…) provided a foundation for the modern discipline of logic by developing a more perspicuous method of formally representing the logic of thoughts and inferences. He did this by developing: (a) a system allowing one to study inferences formally, (b) an analysis of complex sentences and quantifier phrases that showed an underlying unity to certain classes of inferences, (c) an analysis of proof and definition, (d) a theory of extensions which, though seriously flawed, offered an intriguing picture of the foundations of mathematics, (e) an analysis of statements about number (i.e., of answers to the question 'How many?'), (f) definitions and proofs of some of the basic axioms of number theory from a limited set of logically primitive concepts and axioms, and (g) a conception of logic as a discipline which has some compelling features (ZALTA, 2019).

Dentre todas as contribuições de Frege, nessa dissertação, me voltei para o conceito de número que foi desenvolvido através de obras como *Conceitografia*[3] (1879), *Os Fundamentos da Aritmética*[4] (1884), e *As Leis Básicas da Aritmética*[5] (1893, 1903). E, através dessadissertação, objetivo, principalmente, evidenciar a relevância de concepção de número

---

[1] De acordo com a EMS (European Mathematical Society), "Hilbert's system of axioms was the first fairly rigorous foundation of Euclidean geometry. All elements (terms, axioms, and postulates) of Euclidean geometry that are not explicitly stated in Hilbert's system can be defined by or derived from the basic elements (objects, relations, and axioms) of his system. Similarly, all the propositions, theorems, and constructions of Euclidean geometry not specifically stated in Hilbert's system are logically deducible from his axioms, or from statements which are deducible from these axioms" (BAZYLEV, 2015).

[2] Sendo Gauss, Lobachevsky e Riemann, alguns dos principais nomes dos responsáveis pelos avanços nessa área.

[3]*Begriffsschrift* (1879). Também traduzido para o inlgês como "Concept Script" e "Concept Notaion", e para o português como "Conceitografia".

[4]*Die Grundlagen der Arithmetik*(1884).

[5]*Grundgesetze der Arithmetik* (1893, 1903).

de Frege dentro de um debate recente que as obras de Michel Dummett sobre Frege promoveram. Poincaré, por sua vez, também um dos principais nome dessa dissertação, foi um autor que se inseriu ativamente nesse período importante da filosofia da matemática[6], de Frege a Gödel. Período esse que chegar a ser, inclusive, chamado de "clássico" [7]dentro da história da filosofia da matemática. E, ainda que ele,Poincaré, tenha feito muitos alertas bastante assertivos, como, por exemplo, sobre a *predicatividade*[8] e a *Teoria dos Conjuntos* (1874)[9], e mesmo sendo um matemático de enorme prestígio até hoje, ele não parece alcançar o mesmo impacto na filosofia da matemática que outros intelectuais. Diante, então de certa negligência historiográfica, é que julguei importante dissertar sobre a pertinência de algumas de suas produções filosóficas. Paraalcançar, então, uma exposição à altura desse pensador se fez necessário, não só falar de seus contemporâneos como Frege, e os integrantes das demais vertentes da filosofia da matemática no início do século XX, como também foi produzido aqui uma hermenêutica de suas ideias. Embora esse exercício hermenêutico não seja tão simples, pois, como aponta Del Vecchio:

> O pensamento filosófico de Poincaré esconde sob sua aparente simplicidade uma série de armadilhas; (…) seus comentadores têm impressões diametralmente opostas no que concerne à sua obra como um todo: enquanto Phillipe Jourdain toma-o como o exemplo de que um grande matemático não precisa ser necessariamente um bom filósofo um grande lógico, Karl Popper considera-o nada menos que o maior dos filósofos da ciência (HEINZMANN apud VECCHIO, 2006, p. 399).
>
> Leituras tão contraditórias sugerem, no mínimo, que qualquer opinião em relação à obra filosófica de Poincaré não se presta a simplificações extremadas; reclama, ao contrário, uma análise detida (VECCHIO, 2013, p.391-392).

Para tratardessesassuntos organizei a dissertação da seguinte maneira: no primeiro capítulo exponho as três correntes que dividem a filosofia da matemática, quais, de acordo com grande parte da historiografia da mesma são as correnteslogicista, formalista e

---

[6] Vide, por exemplo, sua palestra em Göttingen "Sobre os números transfinitos" ("Über transfinite Zahlen"), proferido em 27 de abril de 1909, em que ele "trata de um momento capital para a reformulação de sua concepção a respeito do diagnóstico e da consequente solução das antinomias da teoria dos conjuntos suscitadas a partir do início do século XX"(VECCHIO, 2013, p. 392).

[7] De Frege a Gödel. Segundo Lindström ePalmgren: "The period in the foundations of mathematics that started in 1879 with the publication of Frege's Begriffsschrift and ended in 1931 with Gödel's *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* can reasonably be called the classical period (LINDSTRÖM; PALMGREN, 2019, p.1).

[8] Segundo Poincaré, na fundamentação logicista da matemática "as antinomias são geradas pelo emprego de definições não predicativas, que envolvem círculos viciosos" (POINCARÉ apud DEL VECCHIO,2013, p. 404); tal como ocorre com o *Paradoxo de Russell* (1902). E, também, como veremos mais detalhadamente no quarto capítulo, com essa afirmação, Poincaré assinala uma crítica à *Teoria dos Conjuntos* (1874).

[9] Data da publicação do artigo *On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers* (1874).

intuicionista. Esse tema, inclusive, foi escolhido para o primeiro capítulo, pois ele deve tanto ajudar a recompor o ambiente de elevado criticismo mútuo (e também muito rico de ideias para a fundamentação da matemática) como também deve ajudar apresentar o estado da arte em que os dois principais autores mencionados nessa dissertação se encontravam.

Já no segundo capítulo, é feito um aprofundamento em Frege com o objetivo de expor seus principais argumentospara a sua concepção de número. E,também, ainda nesse capítulo,procuro evidenciar a relevância dessa concepção num debate recente que as obras de Michel Dummett sobre Frege promoveram. Nesse debate, me posicionei em defesa de Frege por não entender que sua concepção de número tenha "falhado" tanto quanto Dummett assinala[10]. Afinal, o logicismo fregiano obteve, ao menos, dois importantes méritos: desferiu ataques eloquentes contra autores importantes da epistemologia de seu tempo, e construiu um esquema aritmético-lógico que, por um lado, obteve resultados muito elegantes[11] (de um ponto de vista lógico), mas, que, por outro lado, também encontrou desafios ainda sem solução consensual no meio científico[12].

No terceiroe último capítulo, discuto as considerações de Poincaré sobre as concepções logicistas de número, assim como algumas de suas ideias mais abrangentes para a fundamentação da matemática. Momento esse em que pretendo ressaltar o quão assertivas foram algumas de suas ideias sobre a fundamentação da matemática. Como, por exemplo, em suas considerações sobrea *predicatividade*; em suas exigências a respeito da "demonstração"

---

[10]Será exposta de forma mais completa essa postura de Dummett na seção 2.2.1. Mas, nas seguintes passagens, é possível ver como Dummett ressalta recorrentemente "falhas" no logicismo de Frege. Diz ele: "Logicism, as represented first by Frege and then by Russell and Whitehead, failed" (DUMMETT, 1991, p.312). E também, de acordo com ele: "One reason why the philosophy of mathematics appears at present to be becalmed is that we do not know how to accomplish the task at which Frege so lamentably failed" (DUMMETT, 1991, p.317).

[11] Os esquemas construídos por Frege para alcançar a redução da aritmética à lógica contavam com formulações gráficas bem elaboradas, argumentações filosóficas bem colocadas, e cálculos rigorosos. Essas características me levaram então a indicar que a sua filosofia da matemática teria alcançado resultados "elegantes" de um ponto de vista lógico, isto é, de um ponto de vista logicista.

[12]Um exemplo de falta de consenso entorno das antinomias geradas nesse período da filosofia da matemática, de Frege a Gödel, é encontrado no embate hermenêutico gerado pela obra *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956) de Wittgenstein. Nesse texto póstumo, Wittgenstein despreza os resultados dos *Teoremas de Gödel* (1931) e assim divide sua hermenêutica, como podemos ver na atual divisão de autores que saíram em defesa de Gödel, como com a obra: *Misunderstanding Gödel: New Arguments about Wittgenstein and New Remarks by Wittgenstein*(2003) do pesquisador Rodych, e outros que saíram em defesa de Wittgenstein como com a obra: *Wittgenstein and Gödel: An Attempt to Make Wittgenstein's Objection Reasonable*(2017) do pesquisador Lampert. Essa polêmica torna até hoje a questão da solução das antinomias (de Russell e Gödel) indefinível. Sobretudo, em *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956), Wittgenstein advoga a favor de uma assimilação diferente do paradoxo de Russell, de modo que ele não fosse entendido como um erro, ou uma inconsistência lógica. Mas, também essa compreensão sobre o paradoxo, ainda que muito interessante, é apenas uma suposição feita por ele, e que não encontrou maiores detalhamentos.

de Leibniz para “2 + 2 = 4”[13], melhor considerada por ele como uma “verificação” (e não uma demonstração) [14]; e também sua interpretação do logicismo, que é classificado por ele como uma *lógica da infinitude*[15]. Sendo assim classificado por ele, pois, Poincaré dizia não ser possível conformar a infinitude dos entes da matemática à lógica formal, uma vez que essa última seria “nothing but the study of the properties common to all classifications” (POINCARÉ, 1963, p.45). Poincaré defende, portanto, a tese de que essa *lógica da infinitude* seria uma ciência de caráter amostral, e, então, menos geral (e não tão primordial) quanto outros possíveis fundamentos para a matemática. Essa interpretação de Poincaré, como veremos no capítulo 3, parece adiantar o sentimento de “abertura”, ou “incompletude” de sistemas formais fechados (antecipando, de certo modo, as conclusões de Gödel).

[13] "It is not an immediate truth that 2 and 2 are 4; provided it be granted that 4 signifies 3 and 1. It can be proved, as follows: Definitions: (1) 2 is 1 and 1; (2) 3 is 2 and 1; (3) 4 is 3 and 1. Axiom: If equals be substituted for equals, the equality remains. Proof: 2 + 2 = 2+1 + 1 (by Def. 1) = 3 + 1 (by Def. 2) = 4 (by Def. 3). 2 + 2 = 4 (by the Axiom)" (LEIBNIZ apud FREGE, 1980, p.7 / §6).
[14] Em suas palavras, nessa verificação, “A igualdade só foi suscetível de uma verificação porque é particular. Todo enunciado particular, em Matemática, poderá, sempre, ser verificado desse modo. Mas, se a Matemática se devesse reduzir a uma série de tais verificações não seria uma ciência. Assim como um jogador de xadrez, por exemplo, não cria uma ciência quando ganha uma partida. Só há ciência do geral” (POINCARÉ, 1988, p.23). E, diante do atual estado da arte da filosofia da matemática, então muito bem descrito por Dummett da seguinte maneira: “One reason why the philosophy of mathematics appears at present to be becalmed is that we do not know how to accomplish the task at which Frege so lamentably failed” (DUMMETT, 1991, p.317), que então essa exigência de Poincaré por demonstrações gerais, ou não tão singulares, nos parece ainda uma exigência atual.
[15] Título do capítulo IV do livro *Dernières Pensées* (1912). Esse livro reune alguns dos útlimos artigos e leituras de Poincaré. O título desse livro foi traduzido para o inglês como *Mathematics and Science: Last Essays* numa edição de 1913.

CAPÍTULO 1: O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo.

No mundo, não parece haver uma só pessoa que esteja impossibilitada de resolver operações de soma somente porque matemáticos, lógicos e filósofos não resolveram satisfatoriamente as questões da fundamentação da matemática. A matemática segue seu rumo fazendo parecer que discutir o mais "fundamental" talvez seja dispensável para o seu funcionamento. E, portanto, um leigo pode se perguntar: para que serve a fundamentação da matemática? De fato, qualquer pessoa pode concluir operações de soma, mas, se perguntássemos a alguma delas: o que é um número? Encontraríamosmuitas respostas possíveis (visto que nenhuma seja atualmente consensual, ou definitiva, no meio científico). Sobre isso, concordo com Max Black que elucidar "and analyze the notion of integer or natural number" (BLACK, 1973, p.8) é uma das principais questões da fundamentação da matemática.

Como Max Black bem expõe em seu livro *The Nature of Mathematics* (1933), as alternativas de respostas à pergunta "o que é um número?" foram vigorosamente debatidas num período ilustre para a filosofia da matemática. Período esse que, de acordo com Lindström ePalmgren, se iniciou em1879 com a publicação de *Begriffsschrift*[16](1879), e se encerrou em 1931 com o artigo de Gödel: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* [17] (1931).Esse período, segundo eles, poderia "reasonably be called the classical period" (LINDSTRÖM EPALMGREN, 2019, p.1). Afinal, de acordo com os dois, esse período viveu "the development of three major foundational programmes: the logicism of Frege, Russell and Whitehead, the intuitionism of Brouwer, and Hilbert's formalist and proof-theoretic programme" (LINDSTRÖM e PALMGREN, 2019, p.1). Ou seja, esse período viveu uma grande profusão de ideias, e alternativas para a constituição de "uma" fundamentação da matemática, que, no entanto, desde então, se tornou muito polarizada, como veremos adiante.

1.1 Logicismo:

Segundo Black, a tese logicista se resume à ideia de que: "pure mathematics is a branch of logic" (BLACK, 1973, p.v). E, de acordo com ele, embora a nomenclatura

---

[16]*Conceitografia* (1879).
[17]*On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems* (1931).

"logicismo" tenha surgido apenas em 1904[18], já em Leibniz (1646-1706) era possível ver "the germ of the entire logistic conception" (BLACK, 1973, p.8). O principal motivo para essa interpretação é que oconceito de função, introduzido na matemática por Leibniz, era uma ferramenta que aritmetizava cálculos espaciais sem necessidade de desenhos geométricos, e permitia assim um grande poder para a aritmética de representar cálculos geométricos. Essa nova possibilidade era uma oportunidade para a aritmética se colocar em primazia nos fundamentos da matemática, e também fazia com que a mesma operasse de forma bastante simbólica (i.e., através de símbolos), e assim incitava novas possibilidades para a lógica.

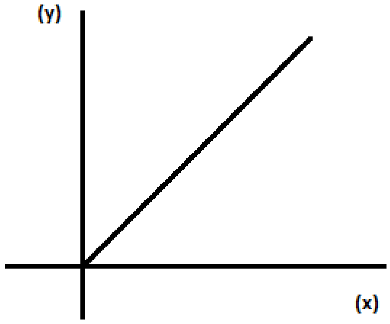
De acordo com Leibniz, em uma carta a Christiaan Huygens[19] (1629-1695), o que ainda viria a ser o conceito de funções, iria representar:

> (…) great advantages in representing to the mind, exactly and in a way faithful to its nature, even without figures, everything which depends on sense perception. (…) it is often difficult to analyze the properties of a figure by calculation, and still more difficult to find very convenient geometrical demonstrations and constructions, even when the algebraic calculation is completed. But this new characteristic (functions), which follows the visual figures, cannot fail to give the solution, the construction, and the geometric demonstration all at the same time, and in a natural way and in one analysis, that is, through determined procedure (LEIBNIZ, 1989, p.250).

Através dessa ferramenta (funções), seria possível fazer operações da seguinte maneira: se y e x são duas variáveis relacionadas por uma função F de tal modo que, se um valor numérico é representado por x, e outro valor numérico é representado por y, temos então y como uma função uniforme de x. Isso também pode ser simbolizado da seguinte maneira: y = f(x). E, através dessa construção, seria possível relacionar expressões aritméticas e figuras geométricas em um plano cartesiano sem a necessidade de se desenhar essas figuras. Seria então possível, por exemplo, representar um retângulo em crescimento através de uma função "y = f(x)" como indicado a seguir:

[18] Segundo Gratann-Guiness, "(…) the French word 'Logistique' was introduced by Couturat and others at the 1904 International Congress of Philosophy, and was used by Russell and others from then on, in versions appropriate for various Languages" (GRATANN-GUINESS, 2000, p.501).

[19]Filósofo da natureza do século XVII responsável por contribuições importantes para a matemática e a física. Segundo Herivel, Huygens "founded the wave theory of light, discovered the true shape of the rings of Saturn, and made original contributions to the science of dynamics—the study of the action of forces on bodies" (HERIVEL, 2019).



Sendo possível, por exemplo, nessa representação de um “retângulo em crescimento” que os elementos do eixo y indiquem o valor de um dos lados menores do retângulo, e os elementos do eixo x indiquem o valor de um dos lados maiores do retângulo.

Contudo, não só o recurso das funções seria uma contribuição de Leibniz intimamente ligada ao logicismo. Lógicos que se seguem a Leibniz, como Boole, Schröder, De Morgan e Peirce, de acordo com Black, teriam incorporado a filosofia de Leibniz de modo que o sonho de uma *Characteristica Universalis* (um cálculo idealizado por Leibniz que seria voltado para a análise lógica de conceitos e estruturas de sistemas científicos) se tornasse possível. Sobre Leibniz, diz Black:

> His work contained the germ of the entire logistic conception; it is no mere coincidence that many of the logistic philosophers find themselves sympathetic to Leibniz and inherit the characteristic atomism of his system.
> The significance for our purposes of Leibniz's studies in the algebra of logic lies in the fact that no proof with any pretensions to rigour of the thesis that mathematics can be reduced to logic is possible without a well-developed symbolism and calculus for logic itself. Statements occurring in logic must be systematically symbolized in order that their relationships to mathematical theorems should become apparent (...).
> Subsequent writers, of whom the most important are De Morgan (...), George Boole (...), E. Schroder (...), and C. S. Peirce by their elaboration of the algebra of logic fulfilled Leibniz’s dream of a *Characteristica Universalis*, a calculus of reasoning suited for the logical analysis of concepts and the structure of scientific systems, and provided the necessary technical equipment for the logistic school (BLACK, 1973, p.16-17).

E, mais tarde, inclusive, essa promessa de uma *Characteristica Universalis* teria inspirado, segundo Bandeira, a *Conceitografia* (1879), ou “notação conceitual”, de Frege também. Diz Bandeira:

> Essa língua artificial (denominada de “notação conceitual”) é, como o próprio Frege reconhece, inspirada na *Característica Universal* de Leibniz., (...) na visão de Leibniz a *Característica Universal* seria um instrumento capaz de expressar todos os pensamentos humanos, independentemente da área. Ela seria capaz de expressar pensamentos tanto da aritmética quanto da moral, tanto da ciência quanto da metafísica. Frege pretende aplicar sua notação conceitual apenas à aritmética (BANDEIRA, 2004, p.21).

Enquanto projeções filosóficas pareciam guiar a lógica, o recurso das "funções" fazia surgir uma nova disciplina chamada de "análise matemática". Essa disciplina viria despertar questões fundacionais para a matemática. Em resumo, a disciplina de "análise matemática" dedicava-se aos cálculos diferencial e integrado (idealizados por Newton e Leibniz), e introduzia recursos como o conceito de limite e números complexos nesses cálculos. Esses novos recursos surgiam, mais especificamente, para lidar com dificuldades em cálculos espaciais, tais como: calcular o comprimento de uma linha curva, e, mais tarde, de acordo com Stewart e Stillwell, esses novos recursos seriam exigidos também para calcular "the total distance traveled by a vehicle moving at varying speeds, the depth at which a ship will float when placed in the sea, or the total fuel consumption of a rocket" (STEWART e STILLWELL, 2017). Mas, também, durante o século XIX, no campo da análise matemática surgiam projetos de "aritmetização da análise" que eram protagonizados por matemáticos preocupados com "the nature of function and number" (BOYER e MERZBACH, 2011, p.533).Sobre esse desdobramento, diz Boyer:

> Mathematics has often been likened to a tree, for it grows through an ever more widely spreading and branching structure above ground, while, at the same time, it sinks its roots ever deeper and wider in the search for a firm foundation. This double growth was especially characteristic of the development of analysis in the nineteenth century, for the rapid expansion of the theory of functions had been accompanied by the rigorous arithmetization of the subject from Bolzano to Weierstrass (BOYER e MERZBACH, p.522, 2011).

Participando desse movimento, Dedekind seguiu a ideia "of reducinganalysis to arithmetic, as opposed to geometry" (RECK, 2017). Isto é, oposta num sentido de ser "fundamentada por", ou "mais fundamental que" [20]. E, inclusive, por isso, Dedekind é classificado como logicista, isto é, não só por promover uma redução da análise matemática a ferramentas da aritmética, mas também por defender uma primazia da aritmética em relação à geometria (um traço bastante comum no logicismo).E, embora a redução da análise à

[20]A forma, por exemplo, como ele se utiliza dos números reais e irracionais para dividir os pontos de uma linha é uma expressão de como a aritmética era primordial para ele, isto é, sendo a aritmética responsável pela regulamentação dos elementos quantitativos da geometria. De acordo com Adam Augustyn e Patricia Bauer, "Dedekind perceived that the character of the continuum need not depend on the quantity of points on a line segment (or continuum) but rather on how the line submits to being divided. His method, now called the Dedekind cut, consisted in separating all the real numbers in a series into two parts such that each real number in one part is less than every real number in the other. Such a cut, which corresponds to a given value, defines an irrational number if no largest or no smallest is present in either part; whereas a rational is defined as a cut in which one part contains a smallest or a largest. Dedekind would therefore define the square root of 2 as the unique number dividing the continuum into two collections of numbers such that all the members of one collection are greater than those of the other, or that cut, or division, separating a series of numbers into two parts such that one collection contains all the numbers whose squares are larger than 2 and the other contains all the numbers whose squares are less than 2" (AUGUSTYN, BAUER et al, 2020).

aritmética não tenha sido algo novo em sua época (também houve outras orquestradas por Cauchy, Bolzano, Weierstrass), a forma como Dedekind seguiu por esse caminho foi bastante influente para autores do período em questão nessa dissertação (de Frege a Gödel). Em uma de suas principais obras, *Continuity and Irrational Numbers*[21](1872), Dedekind:

> (…) compared the system of rational numbers with the points on a geometric line. Once a point of origin, a unit length, and a direction have been picked for the latter, the two systems can be correlated systematically: each rational number corresponds, in a unique and order-preserving way, with a point on the line (RECK, 2017).

Essa discussão promovida por Dedekind contribuiu para que o *Continuum* e a fundamentação da geometria fossem temas muito recorrentes também para outros autores como para Gödel em *The Consistency of the Continuum Hypothesis* (1940), Hilbert em seu primeiro dos 23 problemas propostos no congresso de matemática em Paris no ano 1900 (e mesmo em sua fundamentação consistente para os axiomas da geometria euclidiana), e para Frege. Em algumas palestras[22] da carreira acadêmica de Frege, e na obra *OsFundamentos da Aritmética* (1884), Frege discutiu os fundamentos da geometria e, assim como Dedekind, priorizou a aritmética em oposição à geometria. Em *OsFundamentos da Aritmética* (1884), segundo Schirn, as observações de Frege:

> (…) about space, spatial intuition and the epistemological status of geometrical truths are almost exclusively motivated by the desire to contrast arithmetic with geometry and in this way to display first and foremost the salient features of arithmetic, such as it utmost generality, rather than those of geometry (SCHIRN, 2017).

Além de Dedekind, outros dois autores bastante influentes no logicismo [23] e formalismo foram Peano e Cantor. Os dois contribuíram para que duas ferramentas, axiomas e conjuntos, se tornassem muito recorrentes nos projetos de fundamentação da matemática de

[21]*Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872).

[22] Vide "the list of lectures that he had announced at the University of Jena between 1874 and 1918 (…) such as: on the imaginary, analytic geometry of the plane, analytic geometry according to newer methods, synthetic geometry, projective geometry" (SCHIRN, 2017).

[23] Diante da pesquisa empregada nessa dissertação não me senti confortável para qualificar Peano e Cantor como logicistas, até porque Peano parece, em sua produção, muito próximo de Hilbert (um axiomático formalista). E, inclusive é o que aponta Segre em seu texto *Peano, Logicism and Formalism* (1995). E, também embora o sistema formal idealizado por Cantor, a *Teoria dos Conjuntos* (1874) seja muito empregado em fundamentação da matemática, essa não parece ser a razão de ser desse sistema formal. É possível, inclusive, por outro lado, pensar que uma aproximação entre lógica e matemática através de elementos da *Teoria dos Conjuntos* (1874) tenha sido contingencial, e que seu principal produto tenha sido a descoberta dos números transfinitos.

formalistas e logicistas. Peano e sua escola, *Formulaire de Mathematiques* (1895-1905), demonstraram, através de uma extensa pesquisa em lógica simbólica, que todas as proposições relacionadas aos números naturais poderiam ser deduzidas de cinco axiomas[24].E Cantor, através de seu sistema formal, a *Teoria dos Conjuntos* (1874), promoveu grandes contribuições para uma melhor compreensão do infinito ao idealizar uma "aritmética transfinita" (aprimorando principalmente técnicas da análise matemática), e mais tarde sua teoria também foi acionada por logicistas como Frege, Zermelo, Russell, em suas respectivas tentativas de fundamentação dos números naturais. Zermelo, por exemplo, se apropriou de ambas ferramentas (axiomas e conjuntos), e foi reconhecido, inclusive, tanto por ser o autor do "axioma da escolha" [25], quanto por apresentar uma tentativa de axiomatização da *Teoria dos Conjuntos* (1874). Em sua tentativa de axiomatização, o seu objetivo era construir uma "arithmetic of finite and infinite cardinal numbers" (EBBINGHAUS, 2010, p.183). Sendo a cardinalidade[26] um elemento da *Teoria dos Conjuntos* (1874).

Já Frege, por sua vez, um dos nomes mais atrelados ao logicismo, a fim de fundamentar a aritmética, promoveu uma união formal entre noções elementares da *Teoria dos Conjuntos* (1874), proposições lógico-filosóficas, e funções de tal maneira que, se por um lado, através de funções, Leibniz calculava apenas com entes matemáticos (e preocupando-se apenas com cálculos matemáticos) Frege, por outro lado, também dispondo de novas ferramentas, podia calcular com quaisquer proposições (ou, se colocado de outra maneira, Frege admitia qualquer proposição como elemento de seu cálculo). Desse modo, Frege estruturava as "funções proposicionais", quais, de acordo com Russell, seriam funções "cujos valores são proposições" (RUSSELL, 1974, p.149).

Sobretudo, o cálculo que envolvia essas funções proposicionais compreendia também regras de formação e escolha de símbolos, que então permitiriam o desenvolvimento do "cálculo proposicional" fregiano. Esse cálculo começou a ser construído em *Conceitografia* (1879) e, em resumo, de acordo com Kenny, nessa obra:

---

[24]Como bem resumidos por Russell, os cinco axiomas de Peano são: (1) zero é um número. (2) O sucessor de qualquer número é um número. (3) Não há dois números com um mesmo sucessor. (4) Zero não é o sucessor de número algum. (5) Qualquer propriedade que pertença a zero, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números (RUSSELL, 1974, p.13).

[25]O "Axioma da Escolha" seria um "statement in the language of set theory that makes it possible to form sets by choosing an element simultaneously from each member of an infinite collection of sets even when no algorithm exists for the selection" (ENDERTON, 2013).

[26] Segundo Blackburn, cardinalidade, ou número cardinal de um conjunto, "measures the number of its members"(BLACKBURN, 2005, p.53); isto é, calcula o número de elementos que pertencem a um conjunto.

> (…) in using the terms 'function' and 'argument' Frege was borrowing a mathematical usage; and an analysis of the usage of mathematicians shows that for them functions and arguments are not linguistic items, but something different. In the equation
>
> $$y = x(x - 4)$$
>
> a mathematician may say that y indicates the value of a certain function, and x indicates the argument of the function. The value of the function in question, for the argument 8, is 32. But here argument and value are not symbols: they are numbers, not numerals. In his later work Frege became much more interested in applying the notions of function and argument not so much to items of language, but to the items which language is used to express and talk about (KENNY, 1995, p.17).

De acordo com Frege, nesse seu cálculo proposicional, se

> (...) a simple or complex symbol occurs in one or more places in an expression... If we imagine this symbol as replaceable by another (the same one each time) at one or more of its occurrences, then the part of the expression that shows itself invariant under such replacement is called the function; and the replaceable part, the argument of the function. (FREGE, 2000, p. 127).

Alguns dos símbolos utilizados em seu cálculo proposicional na obra *Conceitografia* (1879) foram representados a seguir no lado direito da Tabela 1. Mais tarde, esses símbolos também seriam representados em cálculos de predicado mais modernos como indicado no lado esquerdo dessa mesma tabela. E, na Tabela 2, está indicado o significado dos símbolos indicados na Tabela 1.

Tabela 1:

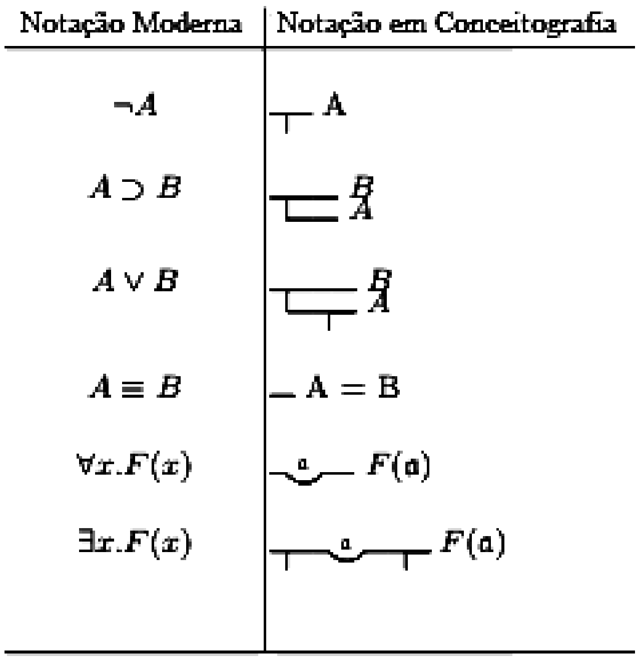


Tabela 2:

Símbolo	Nomenclatura	Significado Em Uma Frase	
$\vee$	Conjunção	$\cdots \vee \cdots$	"tanto ... quanto ..."
$\neg$	Negação	$\neg \cdots$	"não válido para o caso de ..."
$\supset$	Implicação	$\ldots \supset \ldots$	"se ... então ..."
$\equiv$	Bi-implicação	$\ldots \equiv \ldots$	"se... e somente se..."
$\forall$	Quantificador Universal	$\forall x \ldots$	" para todo x, ..."
$\exists$	Quantificador Existencial	$\exists x \ldots$	" existe um x de tal modo que..."

De acordo com Bandeira, em *Conceitografia* (1879), isto é, na obra que se inaugura esse cálculo, Frege primeiro apresenta e explica os conceitos que ele toma como sendo "primitivos" (implicação entre conteúdos conceituais, generalização universal dos conteúdos, e a negação)[27], em seguida assume símbolos adequados para expressar estes conceitos (como os exemplificados pelas tabela 1), e, por fim apresenta regras de inferência para esses símbolos. A partir dos conceitos, segundo Bandeira, Frege consegue expressar "as verdades lógicas ou do pensamento puro e, com a regra de inferência, deduzir outras verdades lógicas"

[27] A forma como Frege exprime esses conceitos primitivos é exposta de forma extensa detalhada tanto em *Conceitografia* (1879), quanto também pelo pesquisador Alessandro Bandeira, de forma um pouco mais resumida, em sua tese de doutorado *Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege* (2009).

(BANDEIRA, p.29, 2009).

Sobretudo, esse cálculo, ou mesmo, essa nova linguagem idealizada por Frege, somado também às suas ideias de uma filosofia da matemática, estaria incumbido de fundamentar formalmente a aritmética através da lógica. No subtítulo de *Begriffsschrift* (1879), por exemplo, Frege apresenta sua notação conceitual como “uma linguagem por fórmulas do pensamento puro modelada pela Aritmética” [28].Contudo, todo projeto fregiano de fundamentação da aritmética foi abalado muito cedo pelo paradoxo encontrado por Bertrand Russell. Esse paradoxo, mesmo antes, teria sido notado por Zermelo, mas ganhou maior visibilidade, e foi mais problematizado na carta[29] de Russell a Frege.

O paradoxo informado à Frege por Bertrand Russell pode ser alcançado da seguinte maneira: consideremos um conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmo. “Is this class a member of itself? If it is, then it is not. And if it is not, then it is” (BLACKBURN, 2005, p.215). E, como se pode perceber, o paradoxo cria um conjunto que não determina seus elementos, e, então, diante dessa indeterminação, o projeto logicista começou a ser revisto, como por Russell na obra *Principia Mathematica* (1910), e também a própria *Teoria dos Conjuntos* (1874) começou a ser questionada sobre sua viabilidade na fundamentação da aritmética. Pois, afinal, o que conjuntos podem conter? Podem existir conjuntos que contenham outros conjuntos? Diante dessa dificuldade no projeto fregiano, Russell e Whitehead se tornaramsucessores de Frege na abordagem logicista dos problemas sobre a fundamentação da matemática, e escreveram a obra *Principia Mathematica* (1910) tendo como uma de suas missões solucionar a questão do paradoxo. Nessa obra, eles pensavam que:

> (…) the chief reason in favour of any theory on the principles of mathematics must always be inductive, i.e. it must lie in the fact that the theory in question enables us to deduce ordinary mathematics (RUSSELL e WHITEHEAD, 1910, p.128).

Para ambos, de toda a matemática produzida até então, seria possível extrair os princípios (regras de inferência, axiomas, e noções lógico-filosóficas) que deduziriam a própria matemática. Contudo, além de outros motivos, essa extração indutiva, em relação a “toda matemática”, parece ter custado caro a ambos pensadores, pois ela parece deixar uma abertura nos sistemas formais fechados quando exige um fator amostral (paradigmático), de

---

[28] Subtítulo da obra *Begriffsschrift* (1879) traduzido por Fernando Raul Neto para a *Revista Brasileira de História da Matemática*, p.124, 2008.

[29] Essa carta, inclusive, foi mencionada no apêndice do segundo tomo da obra *Grundgesetze der Arithmetik* (1893, 1903).

natureza não dedutiva (e sim indutiva como Russell aponta na citação acima), para estabelecer os princípios da matemática. E, assim, ignora que algo de fora do mundo da matemática, e da lógica daquele momento deveria ser considerado. Como, por exemplo, a questão da incompletude que veio a ser introduzida por Gödel em *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems* (1931). Sobre a repercussão desse artigo de Gödel recomendo a leitura do subcapítulo 3.1 dessa dissertação.

Ainda quanto ao *Paradoxo de Russell* (1902), algumas leituras se tornaram comuns. Segundo Blackburn:

> (…) the problem for the programme was that the complexity necessary to avoid paradoxes led to a mapping of mathematics onto set theory, with its own structures and axioms, rather than to anything recognizable as 'purely' logical (BLACKBURN, 2005, p.215).

Essa interpretação de Blackburn da fundamentação de Russell se aproxima também da promovida por Wittgenstein, que se opôs veementemente ao *Principia Mathematica* (1910) alegando que Russell haveria limitado o seu vocabulário lógico para estabelecer regras para sua teoria a fim de evitar o *Paradoxo de Russell* (1902), quando na verdade "only the description of expressions may be presupposed"(WITTGENSTEIN, 2001, 3.33). Ou seja, Wittgenstein entendia que Russell não deveria propor regras arbitrárias para evitar paradoxos. De acordo com Goldstein,

> (…) to secure consistency, Russell and Whitehead had imposed ad hoc rules governing set formation. Their Theory of Types decrees that there are ascending orders in the universe of discourse —the types of things we interpret the formal theory as speaking about. Basic individuals constitute Type I; sets of individuals, Type II; sets of sets, Type III; sets of sets of sets, Type IV; etc. An item can be a member only of an item of a higher type. The question then of whether a set is a member of itself can't even arise. The rules of Principia Mathematica bar the formation of such paradox-breeding sets as the set of all sets not members of themselves. Russell and Whitehead called their rules the "Theory of Types," but the problem was that there was no real theory behind the rules at all, as they themselves ruefully acknowledged; there was no explanation at all as to why certain sets were allowable and others not (GOLDSTEIN, 2005, p.92-93).

De fato, o paradoxo encontrado por Russell foi o grande problema que assombrou historicamente o logicismo. Porém, talvez o problema não tenha sido seguir o mapeamento "of mathematics onto set theory" (BLACKBURN, 2005, p.215). Isto é, talvez o problema nãoesteja nas estruturas dessa teoria. Pode ser que as estruturas dessa teoria sejam um meio por onde se evidenciou um problema. E, também é possível que a teoria de Cantor não seja desprovida de traços puramente lógicos (vide seu potencial para construir análises lógicas[30] tanto em primeira ordem, quanto em quantas ordens forem). Wittgenstein, por exemplo, entendia "evitar paradoxos" na lógica não seria uma boa saída. E defendiaque entender como esses paradoxos calham muito bem à lógica e à aritmética poderia ser uma solução mais adequada. Em *Remarks on the Foundation of Mathematics* (1956), um obra póstuma formada por escritos não publicados de Wittgenstein, ele diz: "if a contradiction were now actually found in arithmetic that would only prove that an arithmetic with such a contradiction in it could render very good service" (WITTGENSTEIN, 1985, p.401)[31][32].

1.2 Formalismo:

> "*(...) pure mathematics consists entirely as the subject in which we never know what we are talking about, not whether what we are saying is true*" (RUSSELL, 1910, p.75**).**

De acordo com Black, os formalistas entendiam que "(…) pure mathematics is the science of the formal structure of symbols (…)", e negavam que "mathematical concepts can

[30]Os trens de Sendai da série 1000N, por exemplo, são operados por um sistema de "fuzzy sets" desde 1987 no Japão. Esse sistema controla a velocidade dos trens sem intervenção humana e chegou a receber o vigésimo oitavo prêmio Laurel (destinado aos trens de maior sucesso no Japão no ano anterior). O sucesso da aplicação desse sistema deve parecer muito estranho para quem questiona a capacidade de análise da *Teoria dos Conjuntos* (1874). Contudo, a capacidade de análise lógica que essa ferramenta (conjuntos) produz é ainda muito valiosa, como no caso dos trens de Sendai.

[31] De acordo com Glock, para Wittgenstein,"Mathematical propositions describe neither abstract entities nor empirical reality, nor do they reflect the transcendental workings of the mind. Their a priori status is dueto the fact that, in spite of their descriptive appearance, their role is a normative one (...). Mathematical propositions are rules of GRAMMAR, 'paradigms' for the transformation of empirical propositions" (WITTGENSTEIN apud GLOCK, 1996, p.233-234).Ou seja, Wittgenstein, talvez não concordasse com o princípio de Hilbert (que diz: se algo é consistente em matemática, então esse algo existe). Wittgenstein, de acordo com Glock, considerava que as regras da matemática seriam gramaticais, paradigmáticas, e teriam como objetivo formar proposições satisfatórias empiricamente. Não importando, por exemplo, se essas proposições seriam contraditórias ou não.

[32]Sobretudo, considero como um bom exemplo desse "bom serviço" da contradição na aritmética a seguinte situação: na questão "qual a raiz quadrada de 4?",se considerarmos todos os números inteiros, teríamos como respostas possíveis os números 2, e o -2. E, assim, se uma das opções for a correta, então a outra estaria incorreta. Tal indeterminação, e mesmo a contradição entre as possíveis respostas, contudo, não parecem apontar uma falha na aritmética. Muito pelo contrário. Os números tanto negativos quanto positivos são uma parte da matemática amplamente empregada (como na física, ou na economia). De forma análoga, penso queum novo entendimento sobre indeterminações e contradições poderia mostrar que o paradoxo de Russell seria apenas um tipo diferente de conjunto (um que não determina quais elementos estariam contidos nele mesmo), e, portanto, esse novo entendimento indicaria que o Paradoxo de Russell talvez não assinale nenhum funcionamento inadequado da teoria de Cantor (da mesma forma que os números positivos e negativos não assinalam um mal funcionamento da aritmética).

be reduced to logical concepts" (BLACK, 1973, p.8). Os formalistas, portanto, criavam uma oposição entre lógica e matemática nas decisões sobre a fundamentação da matemática.

O principal nome dessa vertente foi David Hilbert, e ele, inclusive, foi quem apresentou primeiro o conceito "formalismo"; ainda que, inicialmente, ele não tivesse nenhuma pretensão de, através dessa nomenclatura, caracterizar uma atitude filosófica diante das questões da fundamentação da matemática.Segundo Sinaceur,

> In his essays on the foundations of mathematics, Hilbert did use the German word '*Formalismus*', but *not* to characterize a philosophical attitude towards questions on the nature of mathematical objects or practice. '*Formalismus*' meant 'formal system' or 'formal language', both *technical* concepts of mathematical logic. (…) in his 1931 essay to Brouwer's "reproach of formalism", he took 'Formalismus' *only* in the technical sense and explained that the use of formulas, i.e. formalization, is a necessary tool of logical investigation (SINACEUR, 2019, p.358).

O formalismo, de fato, só adquiriu sua classificação como postura filosófica nas críticas intuicionistas de Luitzen Brouwer. Segundo Sinaceur,

> In a 1909 review of Mannoury's *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik*, Brouwer wrote that "the formalist conception recognizes no other mathematics than the mathematical language and it considers it essential to draw up definitions and axioms and to deduce from these other propositions by means of logical principles which are also explicitly formulated beforehand (…)". (…) In his famous 1912 essay, Brouwer added other considerations, the analysis of which shows that he took formalism as purely and simply antithetic to his intuitionism. By the label 'formalism', Brouwer referred to a global philosophical attitude involved in classical methods of analysis as well as in set theory and in modern axiomatic theories, which use the language and the means of symbolic logic (BROUWER apud SINACEUR, 2019, p.358).

Também em sua leitura de Hilbert, Brouwer apontava que ancorar a matemática apenas em provas de consistência, assim como defendia Hilbert em uma de suas declarações mais famosas: "If the arbitrarily given axioms do not contradict one another, then they are true, and the things defined by the axioms exist" (HILBERT, et al., 1980, p. 40), faria a matemática estar ancorada "in a logical, i.e. a *non-mathematical, conviction* of legitimacy" (SINACEUR, 2019, p.358). E, por esse motivo, para Brouwer,talvez a abordagem formalista não seria capaz de fundamentara matemática de forma válida.

Embora as críticas de Brouwer fossem pertinentes, por outro lado, o método de Hilbert, e a sua procura apenas por consistência, geravam resultados (como a primeira fundamentação consistente de alguns dos postulados da geometria euclidiana) [33]. E, mesmo nos dias atuais

[33]De acordo com a EMS (European Mathematical Society), "Hilbert's system of axioms was the first fairly rigorous foundation of Euclidean geometry. All elements (terms, axioms, and postulates) of Euclidean geometry that are not explicitly stated in Hilbert's system can be defined by or derived from the basic elements (objects,

sua procura axiomática por consistência poderia ser resgatada, como aponta Viero em seu livro *Sistemas Axiomáticos Formalizados: A Questão da Desinterpretação da Axiomática* (1990)[34].

Sobre as divergências entre Hilbert e Brouwer, diz Kreisel: "the real opposition between Brouwer's and Hilbert's approach was (…) between the conception of what constitutes a foundation" (KREISEL, 1958, p. 158). Afinal, Brouwer acreditava que, mais do que consistência, a filosofia da matemática precisava de intuições que melhor justificassem a "existência" dos entes matemáticos, e entendia também que atestar apenas uma existência linguística nos levaria a "meaningless axioms and deducing from meaningless relations some other meaningless relations in the language of symbolic logic" (SINACEUR, 2019, p.360). Enquanto que, do ponto de vista formalista, essa preocupação intuicionista (melhor exposta no subcapítulo seguinte) parecia pouco pragmática, ou pouco matematicamente produtiva (i.e., não alcança abstrações importantes ligadas ao cálculo de entidades matemáticas).

Hilbert, de fato, acreditava que proposições indemonstráveis, porém consistentes, poderiam fundamentar toda a matemática, e não somente a geometria euclidiana como ele já havia feito. No entanto, essa promessa axiomática também foi muito abalada relativamente cedo. Como aponta Zarch, em 1931, "Gödel's incompleteness theorems showed that Hilbert's optimism was undue" (ZARCH, 2019). E isso teria de fato ocorrido porque um principal alvo dos teoremas de Gödel eram as proposições indemonstráveis. Mas, também, sem se considerar os *Teoremas de Gödel* (1931), não é difícil pensar que, de um ponto de vista epistemológico, tentar oferecer uma fundamentação com "proposições indemonstráveis", como propunha Hilbert soa, também, como uma fundamentação mais dogmática do que outras propostas de fundamentação da matemática.

Além de Hilbert, outros dois nomes que também são relacionados ao formalismo são Carnap e Quine. Carnap é considerado um dos maiores representantes do positivismo lógico (ou empirismo lógico), e também "was one of the originators of the new field of philosophy of science and later a leading contributor to semantics and inductive logic" (LEITGEB e CARUS, 2020). Na filosofia da matemática, ele defendiaque "The formalist view is right in

---

relations, and axioms) of his system. Similarly, all the propositions, theorems, and constructions of Euclidean geometry not specifically stated in Hilbert's system are logically deducible from his axioms, or from statements which are deducible from these axioms" (BAZYLEV, 2015).

[34] Nesse livro, Viero analisa o desenvolvimento do método axiomático desde Euclides até o formalismo do século XX, e faz também análises bastante incisivas sobre esse método (como sobre a relação entre "autoevidência" e raciocínios matemáticos).

holding that the construction of the system can be effected purely formally, that is to say without reference to the meaning of the symbols (CARNAP, 1937, p.326)”.

Quine, por outro lado, um dos filósofos tidos como mais influentes da segunda metade do século XX, através de seus textos sobre ontologia, filosofia da linguagem e epistemologia,se aproximava (ainda que de forma muito indireta) de produzir uma filosofia da matemática. Sobretudo, ele rejeitava “the attempt to ground knowledge of the external world in allegedly transcendent and self-validating mental experience” (DUIGNAN, 2019). Para ele, “The proper task of a ‘naturalized epistemology’, as he saw it, was simply to give a psychological account of how scientific knowledge is actually obtained (DUIGNAN, 2019).Ele, então, entendia que se “mathematical theories are part and parcel of scientific theories, they too are confirmed by experience” (HORSTEN, 2019). Para Quine, a experiência seria, portanto, responsável, de alguma maneira, por arbitrar a verdade ou falsidade da ciência formal que seria a matemática. Essa tese, então, participa de sua promessa de união holística entre as proposições analíticas e sintéticas. E, caso essa promessa fosse verificada, então todo o formalismo só precisaria de bases empíricas que comprovassem suas proposições fundamentais.

1.3 Intuicionismo:

Resumidamente, no seu viés mais propositivo, e não crítico, o intuicionismo procurava legitimar uma fundamentação da matemática através da noção de “intuições matemáticas” defendendo que entes matemáticos seriam essencialmente produtos subjetivos (de modo que a existência de um objeto matemático estaria condicionada à possibilidade de sua gênese pela intuição em uma mente), e, assim, seria independente da linguagem formal. Segundo Black, para os intuicionistas:

> (…) pure mathematics is founded on a basic intuition of the possibility of constructing an infinite series of numbers. (…) it is not enough to have a symbolism for mathematical thoughts; they are independent of the particular language used to express them. What is absolutely necessary is that the language should significantly express thoughts (BLACK, 1973, p.9).

Quanto à origem do termo “intuicionismo”, Brouwer introduziu tanto o termo “formalismo” quanto o “intuicionismo” como vertentes na filosofia da matemática em

1909numa revisão de um livro sobre matemática elementar [35]. Segundo Martin-Löf, nesse texto:

> (…) the terms (intuitionism and formalism) appear for the first time, but what he had in mind then with intuitionism was the French school, Poincaré and Borel in the first place, and when, in his inaugural lecture of 1912, he wanted to refer to his own viewpoint, he called that neo-intuitionism. In fact, it was not until the twenties that he took the shrewd step of calling his own conception intuitionism *tout court*, qualifying his predecessors instead as either the pre-intuitionists or the old-intuitionists (MARTIN-LÖF, 2008, p.243).

Inclusive, em *Intuitionism and Formalism* (1912) Brouwer nem chega a separar "logicismo" como uma vertente. Até mesmo porque, de um ponto de vista intuicionista, não era difícil igualar ambos (logicismo e formalismo). Para Brouwer os formalistas, e também os logicistas, estavam atestando apenas uma existência linguística dos entes matemáticos. No entanto, havia, de fato. uma distinção: ao contrário do logicismo, o formalismo dava conta das exigências da "não contradição", ao passo que o logicismo não conseguia superar o *Paradoxo de Russell* (1902).

A crítica de Brouwer (i.e., quando ele alega que ambas as correntes atestavam apenas uma existência linguística dos entes matemáticos) pode soar como uma invalidação dos avanços formais dessas duas vertentes. Porém, segundo Sinaceur, Brouwer não rejeitava:

> (…) the formal way of practice. What he rejected was locating the justification of mathematical substance in symbolic schemas and formal deductions, which are, according to him, only an external dressing. Brouwer rejected also formalism, not as a mathematical way, but as philosophy, or, more accurately as mathematical project to solve philosophical problems (SINACEUR, 2019, p.361).

As divergências entre Brouwer e Hilbert sobre o que seria mais significativo para uma fundamentação da matemática parecia promover uma certa falta de cooperação e alimentava um "mutual criticism between different groups of experts in this field" (BLACK, 1973, p. xiii). Esse criticismo mútuo, inclusive, chega a ser encontrado também em forma de ironia, como, por exemplo, quando Brouwer diz que

> The question where mathematical exactness does exist, is answered differently by the two sides; the intuitionist says: in the human intellect, the formalist says: on paper (BROUWER, 1975, p.125).

[35] *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik* (1909).

Sobretudo, de fato, ainda não é fácil delimitar na filosofia da matemática qual seria a responsabilidade de cada disciplina envolvida (lógica, matemática e filosofia). Mesmo em Brouwer é difícil entender em que medida ele rejeitava a lógica, ou "esquemas formais". Porém, sua escolha por noções filosóficas também tornava difícil julgar de forma objetiva suas ideias sobre a "intuição matemática". Segundo Van Stigt e Parsons:

> The notion of 'intuition' is very involved and opaque in Brouwer. (…) it is argued that the Brouwerian notion of intuition is not exactly what is called intuition by Bergson, Borel, Kant, Poincaré or Russell. (...) From the arguments of C. Parsons (…), we may infer that it is not Gödel's intuition either. (VAN STIGT e PARSONS apud ARDESHIR, 1990, p. 115).

Muito provavelmente, um motivo pelo qual:

> (…) logicists and formalists both distrusted intuition as being an unreliable access to mathematical objects and a shaky ground for mathematical practice. Second, they both developed projects that were intended to ground mathematics on logic, logic being understood as yielding schemas of correct derivation for a formal theory, especially that of natural numbers, the base of the rest (SINACEUR, 2019, p.358).

É claro, ao menos, que a noção de "intuição" para Brouwer detém o status de uma construção mental submetida, inicialmente, apenas ao intelecto humano [36] (i.e., não necessariamente empírica). E esse apelo à subjetividade (comumente atrelado ao intuicionismo) aparece também em Poincaré (para quem a "intuição" é também uma ideia que justifica a criatividade dos matemáticos), embora ele compactue mais com visões sintéticas como de Kant (como veremos no subcapítulo 3.3). Quanto a isso, no primeiro capítulo de *La Science et l'Hypothèse* (1902) Poincaré resume sua posição intuicionista da seguinte maneira: "(…) mathematical reasoning has of itself a kind of creative virtue, and is therefore to be distinguished from the syllogism" (POINCARÉ, 1905, p.3).E, por assim pensar, Poincaré aproximava de forma bastante fundamental o discurso intuicionista e a filosofia da ciência (disciplina que, dentre outros assuntos pertencentes a ela, procura explicar como se formam as teorias científicas), ou mesmo, possivelmente, do estruturalismo: corrente que na filosofia da matemática sustenta "the view that mathematical objects are essentially positions in structures and have no important additional internal composition or nature" (DETLEFSEN, 2005, p.643). Uma vez que, para essa corrente, os produtos da atividade humana são "construídos" e não "naturais".

[36] Em *Foundations of Mathematics* (1907), capítulo III: *Mathematics and Experience*, Brouwer diz que nossa"intellectual manner of looking at the world expands, because man builds up pure mathematics out of the basic intuition of the intellect, without reference to immediate applicability, and thus obtains a ready supply of unreal causal sequences which only wait for an opportunity to be projected into reality" (BROUWER, 1975, p.53).

Outros dois nomes também muito importantes para essa corrente são Heyting e Kronecker. Heyting foi um aluno de Brouwer que se dedicou muito à filosofia intuicionista da matemática e da lógica. Ele desenvolveu sua vertente intuicionista ao longo de muitas décadas (segundo Atten, ao menos de 1928 até 1978). Ao longo dessas décadas, diz Atten:

> The systematic explanation and formalization of intuitionistic logic was begun by Brouwer's student Arend Heyting in 1928. An "explanation" here is an account of what one knows when one understands and correctly uses the logical connectives. Since the 1970s Heyting's explanation and its variants are known as "the Proof Interpretation", as the role played by mind-independent truth in explanations of classical logic is here played by proof (ATTEN, 2017).

Sobre a relação entre as produções filosóficas de Brouwer e Heyting, diz Placek:

> Brouwer's concepts of consciousness, mind, causal attention, and the like play no role in Heyting's argument for intuitionism. The notion of mathematical intuition receives a new reading. The concept of number is introduced in psychological terms and related to a faculty that serves to discern entities in somebody's mental content. Furthermore, Brouwer's overall negative appraisal of logic is replaced by a much more liberal stance that allows for investigations of the logic of intuitionistic mathematics. There is a considerable shift of attitude towards philosophy as well. Heyting claims that "no philosophy is needed to understand intuitionistic mathematics" and that intuitionistic mathematics is simpler than any philosophy (PLACEK, 1999, p.103).

Também um assunto importante que recebeu bastante atenção de ambos, Heyting e Brouwer, foi a lei do terceiro excluído. Segundo Cooper,

> Brouwer (…) contends that 'the principle of excluded middle' is identical with 'the principle of the solvability of every mathematical problem'. This is evidence that Brouwer is interpreting the Law of Excluded Middle not as asserting for any statement that either it or its contradictory is true, but as asserting that for any mathematical statement either it or its contradictory is provable, a claim which does not follow from the Classical Law under any traditional interpretation.
> (…) As Heyting puts it (…), 'Every mathematical assertion can be expressed in the form: "I have effected the construction A in my mind".' If this is so, it is plain that the straightforward denial of a mathematical assertion, 'I have not effected the construction A in my mind', is not itself a mathematical assertion. It is indeed a factual statement, which may be true or false, according to whether or not I have effected a construction. The same also goes for the mathematical negation of the original assertion, namely 'I have effected in my mind a construction B, which deduces a contradiction from the supposition that the construction A were brought to an end' (COOPER, 1978, p.166-167).

Essa reformulação, também tida como uma rejeição, do princípio do terceiro excluído era decorrente também de certa cautela quanto ao "infinito potencial" na matemática. Essa forma de lidar com o infinito entendia que alguns elementos seriam "ainda não demonstrados" dentro de um sistema formal com infinitos elementos; e, portanto, asserções sobre esses elementos seriam "prováveis, ou não" e não "verdadeiras, ou falsas" (como ocorre no princípio do terceiro excluído). Essa cautela também é evidenciada em Poincaré, e veremos de forma mais detalhada, no subcapítulo 3.1, como essa questão com o infinito implica em questões importantes para a filosofia da matemática.

Kronecker (1823-1891), por sua vez, foi um matemático que, dentre outros méritos, contribuiu muito para a teoria das equações, funções elípticas, teoria dos números algébricos e também para a aritmetização da análise. E, na filosofia da matemática, foi influente nos rumos das críticas intuicionistas dirigidas às outras correntes, como através de Poincaré, que também apresentava resistência a novos conceitos na matemática[37]. Sobretudo, devemos adequar Kronecker como um pré-intuicionista, pois, afinal, ele só se aproxima do intuicionismo por conta de sua resistência ao sistema cantoriano e à autores como Bolzano e Weiertrass. Em resumo, Kronecker firmava uma postura extremamente crítica em relação aos autores que participaram da arimetização da análise (os mesmos tidos como precursores tanto do formalismo quanto do logicismo), e então, por tabela, ele é adequado de forma sutil ao intuicionismo. Kronecker, inclusive, era até mais radical que os intuicionistas em alguns aspectos. Diferente de Poincaré, por exemplo, Kronecker não aceitava nem os números transfinitos como entes matemáticos válidos. Segundo O'Conner e Robertson:

> Kronecker believed that mathematics should deal only with finite numbers and with a finite number of operations. He was the first to doubt the significance of non-constructive existence proofs. It appears that, from the early 1870s, Kronecker was opposed to the use of irrational numbers, upper and lower limits, and the Bolzano-Weierstrass theorem, because of their non-constructive nature. Another consequence of his philosophy of mathematics was that to Kronecker transcendental numbers could not exist (O'CONNER e ROBERTSON, 1999).

Uma frase muito famosa, e comumente atribuída a ele, é: "Deus fez os números naturais, e todo o resto é criação humana". Essa frase costuma resumir sua postura diante dos fundamentos da matemática. Uma postura que também já foi expressa por ele de outra maneira:

> So the results of general arithmetic also belong properly to the special, ordinary theory of numbers, and all the results of the profoundest mathematical research must in the end be expressible in the simple forms of the properties of integers (KRONECKER, 2007, p.955).

Quanto a esse posicionamento, uma grande maioria dos matemáticos não concordam com ele. Contudo, Kronecker, ainda assim, pode se mostrar correto caso a matemática um dia

---

[37] Segundo Brouwer, em *Kronecker, the semi-intuitionists, Poincaré* (2003), Poincaré se aproximava do criticismo de Kronecker ao criticar o sistema cantoriano. Para Poincaré o sistema de cantor pecava "for its use of impredicative definitions and of the actual infinite" (BROUWER, 2003, p.18). O entendimento do que seriam essas "definições não predicativas" é exposto no subcapítulo 4.1 dessa dissertação.

alcance um conceito de número amplamente satisfatório e que também esteja em conformidade com sua filosofia da matemática. Inclusive, não muito tempo depois do falecimento de Kronecker surgem, segundo Chaitin, casos na matemática que poderiam sustentar seu criticismo:

> 1. the diagonal and probabilistic proofs that reals are uncountable, and
> 2. the diagonal and probabilistic proofs that there are uncomputable reals.
>
> (…) In the first case these are the famous Jules Richard paradox (1905), Emile Borel's know-it-all real (1927), and the fact that most reals are unnameable, which was the subject of (...) his last book, published when Borel was 81 years old (...).
> In the second case the frightening features are the unsolvability of the halting problem (Turing, 1936), the fact that most reals are uncomputable, and last but not least, the halting probability Ω, which is irreducibly complex (algorithmically random), maximally unknowable, and dramatically illustrates the limits of reason (…) (CHAITIN, 2006, p.1841).

E, assim, esses resultados sobre os números reais apontavam “chasms beneath the feet of mathematicians” (CHAITIN, 2006, p.1841), e corroboravam, de certo modo, com o criticismo de Kronecker.

1.4 Resumo:

Três assuntos são centrais o suficiente para serem resumidos nessa seção: (1) como se dividia a filosofia da matemática no início do século XX em três correntes; (2) como a disciplina “análise matemática” seria precursora de ao menos duas correntes clássicas (logicismo e formalismo); e (3) que essa divisão da filosofia da matemática (logicismo, intuicionismo e formalismo) não encontra ainda solução consensual. Esses assuntos serão então resumidos a seguir.

Em primeiro lugar, como exposto na seção 1.1, a “análise matemática” parece ser a disciplina que iniciou o surgimento de novas perspectivas na fundamentação da matemática.Ao longo de todo o capítulo 1, vimos, por exemplo, como Dedekind e Cantorsão nomes incluídos nessa disciplina (análise matemática), e vimos como que os autores incluídos nessa disciplinapoderiam ser entendidos como precursores de uma segunda geração (então, tida como clássica) que inclui, por sua vez, autores como Hilbert, Frege, Zermelo e Russell.

Ademais, as distinções relativas as correntes “logicismo, formalismo e intuicionismo”, que foram expostas nas seções 1.1, 1.2 e 1.3,são agora resumidasna seguinte tabela:

Correntes Clássicas:	Logicismo	Formalismo	Intuicionismo

Características Principais:	Procura fundamentar a matemática com elementos da lógica.	Procura fundamentar a matemática com elementos formais, mas não necessariamente lógicos. I.e., cabe nessa corrente uma críticaao uso de elementos lógicos na fundamentação da matemática.	Aponta assuntos não-formais, e sim "intuitivos", como primordiais para a fundamentação da matemática.
Principais Nomes:	Frege, Zermelo, Russell e Whitehead.	Hilbert e Peano[38].	Brouwer, Heyting e Poincaré.
Origem Etimológica Dos Nomes Das Três Correntes Clássicas:	A palavra "logicista" foi empregada pela primeira vez por Couturat no Congresso Internacional de Filosofia em 1904.	O primeiro a utilizar o termo "concepção formalista" foi Brouwer numa revisão de um livro de matemática elementar em 1909.	O termo "intuicionismo" também foi utilizado pela primeira vez por Brouwer numa revisão de um livro de matemática elementar em 1909.

E,também, tentei expor,ao longo de todo o capítulo 1, o estado da arte em que essas três vertentes clássicas se encontram. E o que espero ter evidenciado é que a fundamentação da matemática tem muitas perspectivas diferentes, e isso não ocorreu somente na primeira metade do século XX. Antes mesmo, no século XIX, haviam, de fato, posturas mais populares e menos populares, mas que conseguiram se manter como"concorrentes" até hoje. Vide o criticismo de Kronecker (bastante impopular, mas também consistente) e o intuicionismo de Brouwer (quase tão impopular no meio científico quanto Kronecker, mas ainda assim presente na história da fundamentação da matemática como uma alternativa também).

[38] A adequação de Peano dentro de alguma dessas vertentes ainda é um assunto debatido por pesquisadores, como por Sege (pesquisador que contrapõe outros no sentido de defender que Peano seria um formalista), e, por isso, ele foi incluído na tabela com essa ressalva.

CAPÍTULO 2: Frege e aPrimaziada Lógica na Fundamentação da Matemática.

Desde os antigos gregos, houve, na tradição da filosofia da matemática ocidental, grande valorização, ou então uma primazia, da geometria nos estudos filosóficos de fundamentação da matemática (e não da aritmética). Euclides, por exemplo, tomava os "números" como dados imanentes do espaço geométrico que ele buscava fundamentar nos Elementos[39]; Pitagóricos se apoiavam em um simbolismo fortemente atrelado a figuras geométricas[40] para defender a ideia de que "tudo é número", ou que "all is so far formed according to number" (PITÁGORAS apud ARISTÓTELES, 1889, p.50); e, Aristóteles participava da filosofia da matemática com argumentos que eram voltados para relações espaciais, como sobre o contínuo e a divisibilidade dos corpos[41]. Essa valorização da geometria, ou do espaço físico (ou, mesmo de magnitudes concretas)[42], permaneceu na história ocidental da filosofia da matemática até que, posteriormente, no século XVII, sofreu

---

[39] O sentido fundamental da aplicação da noção de "número" em Euclides é a fundamentação do espaço geométrico, e também parece que a noção de número seja relativa à ideia de "magnitudes homogêneas". Segundo Sutherland, a concepção grega de "homogeneous magnitudes derives from the theory of proportion, whose development is attributed to Eudoxus and is known to us through books 5 and 7 of Euclid's Elements.12 Euclid does not define magnitude [*megathos*]. He does, however, use the term to help pick out the sorts of things that are capable of standing in ratios. Euclid states: "A ratio is a kind of relation with respect to size between two homogeneous [*homogenon*] magnitudes" (bk. 5, def. 3). Euclid has in mind things like lines, plane surfaces, volumes, and numbers; two lines can stand in a ratio, for example, and the numbers 3 and 73 can stand in the ratio 3:73.14 Thus, lines are homogeneous with lines, planes with planes, and numbers with numbers (…), just as an area cannot stand in a ratio to a volume (EUCLIDES apud SUTHERLAND, 2004, p.161).

[40] Como sobre o *tetractys* (um triângulo composto por dez pontos capaz de "gerar" outras formas geométricas "fundamentais"). Segundo Boyer, o número mais sagrado para os pitagóricos era "the number 10, or the tetractys, for it represented the number of the universe, including the sum of all of the possible geometric dimensions. A single point is the generator of dimensions, two points determine a line of dimension one, three points (not on a line) determine a triangle with area of dimension two, and four points (not in a plane) determine a tetrahedron with volume of dimension three; the sum of the numbers representing all dimensions, therefore, is the reversed number 10" (BOYER e MERZBACH, 2011, p.48). Porém, como diz Zeller, esses apoios para uma filosofia da matemática eram, em sua grande parte, "very arbitrary and unmethodical" (ZELLER, 1889, p.52).

[41] Como quando ele disserta sobre o significado de "quantidade" no livro *Delta* 13 da "Metafísica" (1020a8-14), atrelando a noção de "contáveis" (*arithmeton*) a magnetudes mensuráveis em corpos, linhas e superfícies. A discussão sobre continuidade e descontinuidade dos corpos também se faz presente nessa passagem muito provavelmente porque era uma questão importante em suas respostas ao antimobilismo de Zenão. As considerações de Aristóteles sobre o antimobilismo podem ser encontradas nos livros: 4 (capítulo 2), e 6 (capítulos 2 e 9) da "Física".

[42] O temo "magnitudes concretas" pode ser ententido ao longo dessa dissertação como "quantidades espaço-temporais bem determinadas".

algumas baixas significativas com o desenvolvimento gradual da “análise matemática” (como vimos na seção 1.1). Sobre essa gradual mudança de paradigma, diz Sutherland:

> (…) the dominance of geometry gradually waned from the late Middle Ages through the early modern period but was still influential in the eighteenth century. Numbers gradually moved to center stage in mathematics, and concrete magnitudes came to be treated peripherally. This "arithmetization" of mathematics, continued into the nineteenth century, gradually expanding arithmetic computation and problem solving to include the real numbers, solidifying the emancipation of algebra from geometry, and encouraging an abstract understanding of the calculus. It also led to thinking of space and concrete magnitudes as objects to which numbers can be applied rather than thinking of space as an independent source of mathematical knowledge (SUTHERLAND, 2004, p.158).

Frege participou dessa gradual mudança de paradigma. Ele, inclusive, conseguiu se firmar como um dos principais nomes desse novo momento da filosofia da matemática em que números já começavam a ser descritos de forma independente do espaço geométrico. Sua participação, sobretudo se destaca nessa história, poisele acabou criando uma nova possibilidade no embate entre racionalistas e empiristas, que até então dividiam a discussão sobre a natureza dos entes da matemática nos séculos anteriores (como através de Descartes, Locke, Hume, etc.).

Dentre muitos autores modernos, dois grandes nomes ainda muito influentes na filosofia da matemática no final do século XIX foram discutidos por Frege: Stuart Mill e Immanuel Kant. Esses dois diziam ter resolvido questões fundamentais sobre a natureza do raciocínio matemático: isto é, se o mesmo seria essencialmente racional ou fundado pelo mundo sensível. E, também, além desses dois importantes nomes da história da epistemologia moderna, umacorrente de inspiração empirista se manifestava: o psicologismo (que se inspirava nos textos de Mill, inclusive), e era tão presente na epistemologia da época de Frege, que motivou ele a contrapor criticamente essa corrente também.

2.1 A Oposição de Frege à Mill, Kant e aos Psicologistas.

Para Kant, todos os objetos da experiência humana se conformavam a condições (1) conceituais e (2) intuitivas, e, segundo Sutherland, essas condições também fundariam sua filosofia da matemática em “concrete magnitudes” (ainda que de forma diferente dos antigos gregos); afinal, vejamos: para Kant, a primeira condição (1) seria imposta por categorias do entendimento, enquanto a última (2) seria imposta por formas puras da sensibilidade, isto é, espaço e tempo (que são, ou se manifestam como, magnitudes físicas). E a combinação[43]

[43] Kant combina essas duas condições através da noção de esquema. Contudo, “Kant’s doctrine of the Schematism is crucial yet obscure” (SUTHERLAND, 2017, p.168); o que torna difícil “to give an account of the

dessas condições seria responsável por formar princípios sob os quais toda a experiência se conformaria (incluindo-se a matemática). Esses princípios são apresentados e defendidos por Kant na sessão "Sistema de todos os princípios do entendimento puro" da *Crítica da Razão Pura* [44] (1781, 1787). Os primeiros princípios desse sistema seriam os "Axiomas da intuição" e as "Antecipações da percepção". O princípio dos axiomas é: "todas as intuições são quantidades extensivas" e o princípio das antecipações é "em todos os fenômenos o real, que é um objeto da sensação, tem quantidade intensiva, i. e., um grau" (KANT, 2015, p.189-191 / B202, B207). E, portanto, uma vez que para Kant todas as intuições são "quantidades extensivas", e também as "formas da sensibilidade pura", espaço e tempo,são responsáveis por impor as categorias do entendimento, que, então podemos dizer que Kant tinha como fundamentais os princípios da "mensurabilidade de magnitudes concretas". O que não significa que Kant tinha esses princípios como princípios da matemática, mas, como aponta Sutherland, que esses princípios estariam "themselves included in mathematics" (SUTHERLAND, 2004, p.160). Ou seja, esses princípios seriam tão universais acerca dos corpos físicos quanto sobre a mensurabilidade deles. Em suas próprias palavras, Kant diz:

> (...) não incluirei os princípios da matemática entre os meus princípios, mas apenas aqueles em que se fundam a priori a possibilidade e a validade objetiva dos mesmos e que, portanto, têm de ser vistos como princípio desses princípios. (KANT, 2015, p.187 / B199).
>
> Eu também mencionei na (…) tábua dos princípios do entendimento puro, certos axiomas da intuição; mas o princípio ali introduzido não era ele próprio um axioma, servindo antes para indicar o princípio da possibilidade dos axiomas em geral, e sendo apenas, ele próprio, um princípio derivado de conceitos. Pois mesmo a possibilidade da matemática tem de ser mostrada na filosofia transcendental. A filosofia, portanto, não tem axiomas e nunca pode impor os seus princípios a priori de maneira tão absoluta, mas tem antes de contentar-se em justificar, por meio de uma rigorosa dedução, a sua prerrogativa em relação a eles (KANT, 2015, p.543 / B761).

Já Mill, por sua vez, apresenta uma fundamentação da matemática em termos mais simples. Ele assenta a fundamentação da matemática mais diretamente sob magnitudes concretas. Em sua obra *System of Logic* (1843) ele diz "Each of the numbers two, three, four, etc., denotes physical phenomena, and connotes a physical property" (MILL, 1874, p.430). Demonstrando mais uma vez uma tendência muito forte da tradição filosófica ocidental em

---

Schematism or what it means to equate number with the schema of magnitude as a concept of the understanding"(SUTHERLAND, 2017, p.168). Mas, até onde se pode perceber, é evidente, ao menos, que Kant assinala em sua concepção de número a importância do tempo (então compatível com a ideia de sucessão) na apreensão da intuição; como na seguinte passagem: "O esquema puro da quantidade como conceito do entendimento é contudo o número, que é uma representação que enfeixa a sucessiva adição de um a um" (KANT, 2015, p.177 / B182).

[44] *Kritik der reinen Vernunft* (1871, 1887).

conectar a fundamentação da matemática e a geometria (disciplina essa muito marcada por "magnitudes concretas" do mundo físico). De acordo com Macleod,

> Mill's account of mathematics is brief, and raises many issues. Amongst the most pressing questions pertain to the status of the objects which mathematicians talk about. The Platonist can characterize the claims of mathematics as claims about abstract objects—but, as a naturalist, no such option is open to Mill. "All numbers must be numbers of something: there are no such things as numbers in the abstract" (...). Similarly, there are no real objects corresponding to the definitions of geometry (...). Mill, rather, claims that numbers are properties of aggregates and as such denote aggregates with those properties, and takes geometrical objects to be limit cases of real world objects (...) (MILL apud MACLEOD, 2020).

Em oposição a esses dois autores, Frege seguiu a tendência aritmética e lógica. Ou seja,ele não assentavasua filosofia da matemática em magnitudes concretas (e tampouco com a ideia kantiana de que proposições matemáticas têm natureza sintética). Frege optou por uma fundamentação da matemática através de ferramentas que seriam, para ele, puramente analíticas e não sintéticas[45]. Pois, afinal, para Frege, a melhor forma, de se separar proposições analíticas e sintéticas seria indicando se a verdade ou falsidade das mesmas é informada analiticamente ou sinteticamente. E, para Frege, ao contrário das verdades empíricas, as proposições matemáticas, e lógicas, não precisam existir somente para serem verdadeiras e por isso seriam analíticas e não sintéticas. Segundo ele:

> (...) these distinctions between a priori and a posteriori,synthetic and analytic, concern, as I see it, not the content of the judgement but the justification for making the judgement (FREGE, 1980, §3 / p.3).
>
> For a proposition to be true is just not the same thing as for it to be thought" (FREGE, 1980, §77).

Sobretudo, além desses argumentos filosóficos, o conjunto de suas formulações na lógica simbólica também era um elemento chave para sua filosofia da matemática. De acordo com Kenny, na disciplina da lógica simbólica:

> Frege's greatest contribution (...) was his invention of quantification theory: a method of symbolizing and rigorously displaying those inferences that depend for their validity on expressions such as 'all' or 'some', 'any' or 'every', 'no' or 'none' (KENNY, 1995, p.4).

[45] A distinção entre proposições analíticas e sintéticas foram estabelecidas, nesses termos, inicialmente por Kant. Segundo ele, "Em todos os juízos nos quais é pensada a relação entre um sujeito e um predicado (se levo em conta apenas os afirmativos, já que a aplicação será depois mais fácil nos negativos), essa relação é possível de dois modos. Ou o predicado "B" pertence ao sujeito "A" como algo que já está contido (de modo oculto) neste conceito "A"; ou "B" se localiza inteiramente fora do conceito "A", mesmo estando em conexão com ele. No primeiro caso eu denomino o juízo analítico, no segundo sintético. Os juízos analíticos (afirmativos) são, portanto, aqueles em que a conexão do predicado com o sujeito é pensada por meio da identidade, e aqueles, ao contrário, em que essa conexão é pensada sem identidade, devem denominar-se juízos sintéticos" (KANT, 2012, p.51 / B10-B11).

Essas contribuições apareceram primeiro em *Conceitografia* (1879), e com elas Frege construiu a base de todo desenvolvimento subsequente na lógica, e em teorias formais de inferência, "in a more rigorous and more general way than the traditional Aristotelian syllogistic which up to the time of Kant was looked on as the be-all and end-all of logic" (KENNY, 1995, p.4). Nessa obra, Frege delineou os operadores lógicos, quantificadores, estabeleceu uma forma lógica para a proposições a partir do conceito de função, e também estabeleceu alguns axiomas e regras de inferência.

Dentro de sua historiografia, a obra *Conceitografia*(1879) exerceu a função de apresentar noções preparatórias para a redução da aritmética à lógica, enquanto as produções menos formais e mais filosófica de Frege teriam que "wait for the publication of his book *The Foundations of Arithmetic* in 1884" (KENNY, 1995, p.5). Entre uma obra e outra, "Frege's publications (...) consisted mainly of responses to hostile reviews and explanations" (KENNY, 1995, p.6), e, talvez, por isso, Frege também tenha julgado necessário debater com autores modernos em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884, 1903). Isto é, para melhor ser entendido pelos seus pares.

Na obra *Os Fundamentos da Aritmética* (1884, 1903), então, a tese de que a aritmética é derivável da lógica aparece de forma diferente do que em *Conceitografia* (1879), isto é, os símbolos lógicos aparecem com menos frequência e o debate é conduzido através de embates com outros autores. A obra *Os Fundamentos da Aritmética* (1884, 1903), é inclusive divisível entre momentos argumentativos (em relação à tradição filosófica), e outros mais propositivos (onde ele discorre sobre o 'projeto fregiano' para a fundamentação da aritmética). Quanto aos momentos propositivos, Frege manifesta três exigências iniciais para a fundamentação da matemática.Para ele, seria necessário uma sustentação (1) objetiva; que fosse (2) suficientemente geral para a conceituação dos números cardinais[46]; e que (3) expressasse a congruência entre uma definição de número e o pensamento puro (lógica), permitindo operações com números em fórmulas numéricas. Frege expressa essas exigências, por exemplo, nas seguintes passagens:

> (…) we have need of general propositions if we are to derive the numerical formulae from these definitions (of number). Such laws cannot (…) follow from the definitions of the individual numbers, but only from the general concept of Number (FREGE, 1980, p.25. / §18).

[46] Frege poderia se referir tanto aos números naturais quanto aos cardinais, mas escolhe os caridinais, muito provavelmente, por uma questão filosófica. Afinal, ele tenta fundamentar os números naturais nos números cardinais. De acordo com Tait, "Contrary to the general tendency in the late nineteenth century on foundations of arithmetic, Frege considered the natural numbers primarily in their role as cardinals" (TAIT, 2002, p.273).

> (…) number, too, is something objective. If we say "The North Sea is 10,000 square miles in extent" then neither by "North Sea" nor by "10,000" do we refer to any state of or process in our minds: on the contrary, we assert something quite objective (FREGE, 1980, p.34 / §26).

Através de suas exigências: por fórmulas numéricas (estritamente racionais, ou “não empíricas”), que permitissem através de derivação inferencial a definição de número, e também que permitissem afirmar sobre a objetividade dos números, Frege promovia também uma ruptura muito direta com uma corrente filosófica emergente do século XIX, isto é, o movimento filosófico denominado naturalismo. Esse movimento era composto por materialistas e empiristas que, inspirados numa interpretação de alguns textos de Mill, desenvolveram algumas teses acerca da relação entre lógica e psicologia, e fizeram surgir assim o “psicologismo” na Alemanha. Para os psicologistas, “a lógica deveria ser uma ciência psicológica, isto é, ela deveria ser um ramo da psicologia” (MACHADO, 2007, p.55). Segundo Machado, dentre outros naturalistas,

> Czolbe foi o único (…) do séc. XIX que se preocupou em dar uma organização sistemática para as teses naturalistas. Czolbe acreditava que as explicações misteriosas, e, por isso, insatisfatórias da natureza e da mente originavam-se da aceitação da seguinte tese: existem entidades supra-sensíveis. As entidades supra-sensíveis seriam todas aquelas entidades cuja existência poderia e deveria, supostamente, ser reconhecida sem o apelo à percepção dos sentidos. Tais entidades seriam sempre postuladas em uma explicação especulativa (não científica) do mundo, e tal postulação seria um entrave para o progresso da ciência, pois sempre levaria a raciocínios errôneos. (SLUGA apud MACHADO, 2007, p.56).

Ao contrário dos psicologistas, Frege não concordava que seria necessário sempre um correspondente empírico que sustentasse a inteligibilidade de cada objeto matemático, como defende Mill na seguinte passagem: (...) the calculations do not follow from the definition itself but from the observed matter of fact (MILL apud FREGE, p.10, 1980). Segundo esse raciocínio de Mill, a definição de um número só seria dada apenas depois de observarmos fatos empíricos observáveis que espelhassem as operações numéricas. Sobre esse posicionamento de Mill Frege diz: “On Mill's view we could actually not put 1,000,000 = 999,999 + 1 unless we had observed a collection of things split up in precisely this peculiar way” (FREGE, 1980, p.10-11 / §7). Frege, então indica na seção §8 de *Os Fundamentos da Aritmética* (1884, 1903) que essa compreensão estritamente empirista da aritmética encontraria dificuldades para entender os números “zero” e “um”. Afinal, quais seriam os “fatos físicos” que dariam suporte empírico, especificamente, aos números naturais 0 e 1? Frege diz:

> Mill seems to hold that we ought not to form the definitions 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, and so on, unless and until the facts he refers to have been observed. (...) the question is whether, for this, it is necessary to observe his collection and its separation (FREGE, 1980, §8).
>
> Who is actually prepared to assert that the fact which, according to Mill, is contained in the definition of an eighteen-figure number has ever been observed and, who is prepared to deny that the symbol for such a number has, none the less, a sense (FREGE, 1980, §8)?
>
> What a pity that Mill did not also illustrate the physical facts underlying the numbers 0 and 1!" (FREGE, 1980, §7).

Todas essas críticas, e perguntas, parecem apontar carências significativas no pensamento de Mill. Denunciando assim que esse pensador pode não ter evidenciado de forma extensiva o suficiente o porquê de sua forma de entender os números seria a mais adequada. Na visão de Frege, existem questões que teriam sido negligenciadas embora sejam importantes. Dentre essas, uma questão muito significativa é essa sobre a ausência de uma concepção dos números naturais 0 e 1. Afinal, esses números não podem ser tomados, cada um deles, como tipos de "aglomeração" tal como Mill sugere que deveríamos entendê-los na seguinte passagem:

> What then is that which is connoted by a name of number? Of course, some property belonging to the agglomeration of things which we call by the name; and that property is, the characteristic manner in which the agglomeration is made up of, and may be separated into, parts (MILL, 1874, p. 430).

Em resumo, opondo-se a Mill, Frege supõe que um pareamento entre fatos físicos e proposições aritméticas seria desnecessário (segundo seu ponto de vista platônico-logicista[47]), ou então estaria incompleto como quando Frege nota[48] que Mill não oferece uma definição específica para os números 0 e 1.

E, quanto a Kant, Frege sustenta, em *Os Fundamentos da Aritmética*(1884, 1903), que ele subestima "the value of analytic judgments" (FREGE, 1980, p.xi). Principalmente quando Kant afirma que "7 + 5 = 12" não é uma proposição analítica, como no seguinte trecho:

> Que 7 + 5 seja igual a 12 não é uma proposição analítica. (...) Na medida em que aqui só temos em vista a síntese do homogêneo (das unidades), ela só pode acontecer aqui de um único modo, por mais que o uso desses números seja depois universal. Se eu digo que com três linhas, das quais duas somadas são maiores que a terceira, pode ser desenhado um triângulo, eu apenas tenho aqui a função da imaginação produtiva, que desenha as linhas maiores ou menores e faz

[47]O traço platônico de Frege em sua fundamentação da matemática é exposto por Balaguer da seguinte forma: para Frege (1) If a simple sentence (...) is literally true, then the objects that its singular terms denote exist (...). (2) There are literally true simple sentences containing singular terms that refer to things that could only be abstract objects (…). (3) Abstract objects exist (BALAGUER, 2016).

[48] What a pity that Mill did not also illustrate the physical facts underlying the numbers 0 and 1!" (FREGE, 1980, §7).

> com que se cruzem em quaisquer ângulos. O número 7, pelo contrário, só é possível de um único modo, e assim também o número 12, que é produzido pela síntese do primeiro com o 5. Proposições desse tipo não devem ser denominadas axiomas (pois senão haveria um infinito deles), mas sim fórmulas numéricas (KANT, 2015, p.190-191 / B205-B206).

E mesmo que Kant exija que proposições como “7 + 5 = 12” não sejam consideradas axiomas, Frege nota que, da forma como Kant considera essas proposições (como “indemonstráveis”, ou “auto evidentes”) elas se aproximam muito da definição de axiomas. E inclusive, Frege chega a concluir que Kant só se nega a considerar essas proposições como axiomas, pois elas não seriam proposições “gerais” o suficiente, e se repetiriam infinitas vezes na aritmética em expressões diferentes como “2 + 2 = 4”, “4 – 2 = 2” e etc. E, portanto, parecem carecer ainda de fundamentos estritamente analíticos (tal como Frege defende ser mais coerente para a fundamentação da aritmética), e que fossem “gerais” o suficiente (tal como se espera que axiomas se comportem num sistema formal, i.e., como ocorre com os axiomas de Peano[49] na aritmética, ou os de Euclides na geometria plana). Essa questão, segundo Frege é apontada também por Hermann Hankel (1839-1873)[50]:

> We must distinguish numerical formulae, such as 2 + 3 = 5, which deal with particular numbers, from general laws, which hold good for all whole numbers.
> The former are held by some philosophers to be unprovable and immediately self-evident like axioms. Kant declares them to be unprovable and synthetic, but hesitates to call them axioms because they are not general and because the number of them is infinite. Hankel justifiably calls this conception of infinitely numerous unprovable primitive truths incongruous and paradoxical (FREGE, 1980, p.5-6 / §5).

Nessa interpretação de Hankel, parece-me que ambos, Frege e Hankel, menosprezam o que foi a “inversão” promovida por Kant. Ou seja, menosprezam a forma como Kantjustifica que certasproposições aparentemente analíticasdevem ser fundamentalmente sintéticas. Essa inversão é ainda muito sagaz, poisprocura explicara antecipação dos fenômenos físicos. Antecipação essa permitida pela física newtoniana, e pela a matemática, eexplicada por Kant através da filosofia transcendental(que aponta, por exemplo, que existem formas puras da sensibilidade que tornam possível o conhecimento, e, portanto, seriam universais, e assim

[49]Como bem resumidos por Russell, os cinco axiomas de Peano são: (1) zero é um número. (2) O sucessor de qualquer número é um número. (3) Não há dois números com um mesmo sucessor. (4) Zero não é o sucessor de número algum. (5) Qualquer propriedade que pertença a zero, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números (RUSSELL, 1974, p.13).

[50] Matemático alemão que desenvolveu as funções de Hankel, as variações na função de Bessel, desenvolveu uma teoria sobre os números naturais, trabalhou com números complexos, e também com história da matemática, Segundo Folkerts, Hankel dividia a história da matemática em três períodos: ”The first period, geometrical, runs up to the first century A.D. Then follows an arithmetical-algebraical period, which includes Hindu and Arabic mathematics as well as developments in Western mathematics in the 16th century. A new third period begins with Rene Descartes (1596-1650), who unified the two previous aspects of mathematics” (FOLKERTS, 2002, p.122).

indicariam que existem juízos sintéticos-apriori). E, mesmo que Frege proponha uma filosofia puramente analítica para os fundamentos da matemática, seria ainda um desafio provar que não poderíamos acionar formas puras da sensibilidade para fundamentar o conhecimento (matemático e/ou empírico).

Frege, em seu momento mais propositivo, defende, por outro lado, uma autonomia, mesmo que um pouco platônica, das proposições analíticas na fundamentação da matemática em relação ao mundo da sensibilidade. Frege, por exemplo, entende que

> (...) these distinctions between a priori and a posteriori, synthetic and analytic, concern, as I see it, not the content of the judgement but the justification for making the judgement (FREGE, 1980, §3 / p.3).

E, portanto, para ele, a melhor forma de se classificar uma proposição como sintética ou analítica **não** seria através de uma natureza última dos objetos apresentados por uma numa proposição. Uma classificação mais adequada, para ele, se daria através da justificativa que faz com que uma proposição seja, por exemplo, verdadeira ou falsa. E, assim, proposições lógicas e matemáticas seriam, para Frege, analíticas, pois podem ser decididas verdadeiras, falsas, ouindeterminadas, através de ferramentas lógicas e matemáticas.

2.2 A Concepção de Número em Frege.

Frege, então, não só rejeita a importância tradicional de elementos empíricosna fundamentação da matemática (como vimos naseção anterior), como propõe uma definição dos números naturais que dá conta de cada uma de suas exigências, sendo elas, fundamentalmente: (1) objetividade, ou seja, tornasse possívelpensarmos os números da mesma maneira que podemos pensar o "Mar do Norte"[51]; (2) que mostreque os fundamentos da matemática se resolvem analiticamente (estando inteiramente circunscritas ao pensamento puro); e que, portanto (3) seria necessário apenas algumas definições de números e leis gerais de derivação (leis lógicas de inferência) para a obtenção de fórmulas numéricas bem formadas e completas. E, por assim exigir e projetar, Frege entende que os números naturais seriam mais bem conceituados da seguinte maneira:

[51] De acordo com Frege, "number, too, is something objective. If we say 'The North Sea is 10,000 square miles in extent' then neither by 'North Sea' nor by '10,000' do we refer to any state of or process in our minds: on the contrary, we assert something quite objective, which is independent of our ideas and everything of the sort (FREGE, 1980, p.34 / §26).

- Zero seria definido como o número que convém ao conceito “not identical with itself” (FREGE, 1980, p.87 / §74). Assim, o conceito de zero é dado como uma classe que não tem elementos idênticos a si mesmo; e funcionaria como um “número” quando aplicado a outros conceitos equinuméricos a essa classe que não têm elementos idênticos a si mesmo.
- E, quanto ao número 1, antes na seção §76[52] de *Os Fundamentos da Arimética* (1884), Frege assinala ser necessário que a definição de dois números adjacentes estejam intimamente relacionadas para que seja bem descrita a série dos números naturais. E no que diz respeito à adjacência,o número que convém (que está contido), e que por isso compõea definição do número 1 é o seu antecessor, o zero. E assim a definição do número 1 (a classe que funciona como conceito do número 1), e dos demais números, seria dada de acordo com a “extensão” de todos os números antecessores a esses números.E essas classesfuncionariam como um “número” (indicariam uma quantidade) quando aplicados noutras classesque tenham o mesmo número de elementos que essas classes.

É digno de nota que Frege se utiliza apenas noções aritméticas (como da adjacência) que são descritas em uma linguagem formal inspirada na *Teoria dos Conjuntos* (1874) (como veremos a seguir de forma mais clara). Mas, sobretudo, o que busco destacar principalmente aqui é que Frege emprega nessas definições apenas elementos analíticos, e não apela para noções empiristas como as de Mill.

Para lançar luz sobre as relações de definição, e suas terminologias, vou expor agora algumas noções importantes, que são: cardinalidade, equinumeracidade e extensão. A cardinalidade remete a possibilidade de se encontrar um*número-identidade* de um conjuntoqualquer (ou, o *número cardinal*[53] de um conjunto), e esse número seriamensurado (definido) de acordo com a quantidade de elementos que pertencem ao conjunto. Dentro da *Teoria dos Conjuntos* (1874), essa noção (cardinalidade), é, por exemplo, o que nos permite dizer que alguns infinitos são maiores que outros[54].

---

[52]Os termos legais (de lei), que formam a ideia de “seguir em série” se encontram na seção §79.

[53] Segundo Blackburn, “número cardinal” de um conjunto seria o número que “measures the number of its members” (BLACKBURN, 2005, p.271).

[54] Por exemplo, se compararmos um hotel com um número infinito de quartos vazios, a outro com um número infinito de quartos vazios menos um, esse último hotel apresentaria uma cardinalidade menor se comparado ao outro. Tanto é que se tivermos um número infinito de hóspedes eles só poderiam caber perfeitamente no primeiro hotel. O exemplo do hotel foi apresentado por Hilbert pela primeira vez em sua palestra "Über das Unendliche" (1924).

A noção de equinumeracidade, por sua vez, seria indicada na possibilidade de equivalência entre a quantidade de elementos que pertencem a mais de um conjunto. Essa noção é entendida por Frege da seguinte maneira:

> (…) The (cardinal) Number which belongs to the concept F is identical (equal, or equinumerous) with the (cardinal) Number which belongs to the concept G, if there exists a relation which correlates one to one the objects falling under F with those falling under G (FREGE, 1980, p.xi).

E, na seção §67, Frege oferece uma explicação mais extensa para a noção de "equinumeracidade":

> If line a is parallel to line b, then the extension of the concept "line parallel to line a" is identical with the extension of the concept "line parallel to line b"; and conversely, if the extensions of the two concepts just named are identical, then a is parallel to b. (...) To apply this to our own case of Number, we must substitute for lines or triangles concepts, and for parallelism or similarity the possibility of correlating one to one the objects which fall under the one concept with those which fall under the other. For brevity, I shall, when this condition is satisfied, speak of the concept F being equal (or equinumerous) to the concept G (FREGE, 1980, p.79 / §67).

Já a "extensão", o conceito chave que conecta o conceito de cardinalidade, e equinumeracidade ao de quantificação, penso que devamos ver com um pouco mais de cuidado. Frege utiliza esse termo num conjunto de relações entre "funções" e "objetos"[55], de modo que que, para ele,a extensão de um conceito (ou conjunto) F seria "the *course-of-values*[56] of a concept F" (ZALTA, 2020).Ou seja, Frege se apropria do recurso das "funções" e o utiliza em operações lógicas. Como vimos no capítulo 1, isso já era esperado por Leibniz, mas precisava de alguém que pudesse relacionar os conjuntos de Cantor a esse recurso (como, por exemplo, através da noção de cardinalidade e equinumeracidade, como vimos anteriormente ainda nessa seção). No entanto, como seria possível incluir o termo "extensão" no corpo de suafilosofia da matemática sem se abrir mão, assim como Frege pretendia, do caráter puramente analíticonos fundamentos da matemática? Afinal, tradicionalmente,no

---

[55] Segundo Zalta, "Frege's ontology consisted of two fundamentally different types of entities, namely, functions and objects" (ZALTA, 2020).

[56] Os eixos x e y de uma função no plano cartesiano, por exemplo, podem, ambos, conter a ordem crescente dos números naturais (ou, em outras palavras, conter o "curso de valores" dos números naturais), uma vez que os objetos que eles predicam (como largura e altura de uma figura geométrica) comportem uma indicação de valor semelhante à ordem crescente dos números naturais.

pensamento ocidental[57], “extensão”é uma noção espacial (e, portanto, uma noção, de certa forma, fundamentalmente empírica).

Como bem notaLuce, a utilização do termo “extensão” não é uma questão tão claramente desenvolvida em Frege. Em suas palavras, “the close connection between quantification and cardinality has not received the attention it deserves” (LUCE, 1988, p.415).Uma vez que, essa “extensão”, por exemplo, poderia ser até mesmo remetida às noções fundamentais de espaço (colocando assim a geometria, ou as magnitudes físicas, novamente em primazia na fundamentação da matemática). Inclusive, a noção de extensão é também utilizada por Frege em sua analogia com a geometria na passagem a seguir:

> If line a is parallel to line b, then the extension of the concept "line parallel to line a" is identical with the extension of the concept "line parallel to line b"(FREGE, 1980, p.79 / §67).

Entretanto, me parece que, no sistema fregiano, o conceito deextensão[58] é ancorado na noção de enumerabilidade dos números cardinais, o que penso permitir que essa noção, “extensão”, seja referida por Frege como uma medida de *quantidade de elementos que pertencem a conjuntos (ou, conceitos)*,embora “Frege did not conclude that the cardinal numbers are kinds of quantifiers” (LUCE, 1988, p.415). De fato, Luce nota que apesar dos números cardinais serem definidos por Frege como objetos (não conceitos), Fregeentendeos números naturais como “extensions of (…) concepts” (LUCE, 1988, p.415). Deixando em aberto a questão: para Frege seriam todos os conceitos também objetos?

Como nota Luce, há espaço no discurso de Frege para essa questão e, contudo, o máximo que poderíamos fazer são suposições. Em minha leitura entendo que, embora “Frege did not conclude that the cardinal numbers are kinds of quantifiers” (LUCE, 1988, p.415), os mesmos poderiam ser entendidos dessa maneira. Afinal, não vejo como que entender, nas obras de Frege, o conceito de “extensão” como um tipo de “quantificação”, ou tomar o entendimento de que todos os conceitos também seriam objetos, poderia abalar de alguma maneira o projeto fregiano. Pelo contrário, ao entender assim sua obra, parece que

[57] O próprio termo original em latim *extensionem*/*extentionem* parece ser usado no sentido de se “prolongar, ou se tornar maior no espaço”; ou seja, parecer ser associado a elementos empíricos de alguma maneira. Segundo Hoad, o termo viria do latim *extendere* e serviria aos significados de “stretching (...), distension (...); enlargement (...); range” (HOAD, 1996, p.161)

[58] Segundo Ferrater Mora, esse termo pode ser utilizado num sentido físico, ou metafísico. Segundo ele, “Muchos escolásticos consideran que la extensión es una cierta propriedad del cuerpo que hace posible para este último ocupar un cierto espacio. En este caso, el espacio aparece como una especie de receptáculo” (MORA, 1965, p.627) .

conformamos sua definição de número melhor ao seu platonismo[59]. Contudo, de fato, essa discussão sobre conceitos como objetos merece maior atenção por parte de todo corpo de promotores da historiografia e da hermenêutica de Frege para ser conduzida de modo mais definitivo.

2.2.1 Existiriam Problemas na Concepção de Número de Frege?

Como vimos no capítulo anterior (capítulo 2), Frege, com sua filosofia da matemática, rompeu com o psicologismo de forma bastante eloquente, e demonstrou uma possibilidade de se espelhar a lógica e a aritmética. Seu projeto de criar "uma linguagem por fórmulas do pensamento puro modelada pela da Aritmética" [60] (NETO, 2008, p.124) seria rapidamente aceito pela comunidade acadêmica se não fosse por dois eventos importantes. Com o surgimento do *Paradoxo de Russell* (1902) [61] o projeto de Frege virou um alvo fácil para críticas, e também depois, diante da *Incompletude de Gödel* (1931) [62] o mesmo ocorreu. Esses dois grandes marcos da lógica levantaram, de fato, suspeitas incisivas sobre uma ferramenta muito importante apropriada por Frege: o sistema formal de Cantor: a *Teoria dos Conjuntos* (1874). Ainda que, sobretudo, vale também lembrar (assim como venho pontuando sempre que possível ao longo da dissertação) que embora sejam marcos definitivos, a Incompletude de Gödel e o Paradoxo de Russell, são também objetos de estudos controversos e dignos ainda de muita discussão[63]; e, portanto, devemos considerar as suspeitas sobre a teoria de Cantor, e também sobre outros sistemas formais (indicados por Gödel em 1931), com cuidado para que as suspeitas não se tornem julgamentos apressados.

Nessa parte da dissertação, veremos uma leitura muito frequente. Segundo leituras desse tipo, o projeto fregiano de fundamentação da matemática estaria passível a críticas mesmo sem se refletir tanto sobre o Paradoxo de Russell,ou sobre a Incompletude de Gödel.

---

[59] O traço platônico de Frege em sua fundamentação da matemática é exposto por Balaguer da seguinte forma: para Frege (1) If a simple sentence (...) is literally true, then the objects that its singular terms denote exist (...). (2) There are literally true simple sentences containing singular terms that refer to things that could only be abstract objects (…). (3) Abstract objects exist (BALAGUER, 2016).

[60] Subtítulo da obra *Begriffsschrift*, traduzido por Fernando Raul Neto para a *Revista Brasileira de História da Matemática*, Vol. 8, p.124, 2008.

[61] Data do envio de sua carta que informou Frege sobre o paradoxo que ficou conhecido como o Paradoxo de Rusell.

[62] Nos referimos aqui aos teoremas de Gödel, que também são conhecidos como Teoremas da Incompletude, e que estão presentes em *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems* (1931).

[63] Tal como mencionamos anteriormente nessa dissertação (final do subcapítulo 1.1), o paradoxo é discutido por Wittgenstein em *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956). Nessa obra, segundo Floyd e Putnam, em *A Note on Wittgenstein's 'Notorious Paragraph' about the Gödel Theorem* (2000), Wittgenstein também desconsidera o primeiro teorema de Gödel.

Barco, por exemplo, autor de uma tese dissertação muito bem embasada em muitos artigos publicados, lê o projeto de Frege da seguinte maneira:

> It is well known today, Frege's attempt at providing a criterion of identity for numbers is plagued with severe difficulties. The first already appears in Frege's own Foundations of Arithmetic, §57, where the philosopher realizes that fixing the sense of assertions of number as a second order predication about a concept does not yet fix the criteria of identity of a numeral, so we cannot say yet what use of a numeral refers to:
>
>> It is only an illusion that we have defined 0 and 1; in reality we have only fixed the sense of the phrases "the number 0 belongs to", "the number 1 belongs to"; but we have no authority to pick out the 0 and 1 here as self-subsistent objects that can be recognized as the same again (FREGE apud BARCO, p.27, 2018).
>
> Fixing the sense of "the number 0 belongs to" is not yet to fix the sense of "the number 0", and thus the attempt at answering the challenge of identifying numbers as self-subsistent objects through the assertion of quantity will not work, as it does not specify which objects the number-words are (BARCO, p.26-27, 2018).

Ou seja, Barco frisa que através da correspondência entre cardinalidade e funções predicativas (ou, mais precisamente, indicação numérica como equação, e equação como proposição de reconhecimento), Frege fixa apenas o sentido de "o número *n* predica...". Contudo, então, como saber que *n* não é só uma predicação, mas sim que *n* é *n* e somente *n* é *n*? Em outras palavras, como saber que *n*seria um objeto-número?

> (...) in order to unambiguously refer to numbers as objects, Frege offered a principle of abstraction as a contextual definition of numbers. He dubbed it Hume's Principle: (…) if we have a class a of objects that fall under concept F, and a class b of objects that fall under concept G, then, if a and b can be correlated one-to-one, we may identify the cardinality of and as an equivalency of these classes.
>
> (...) But even with the aid of Hume's Principle, the Julius Caesar Problem bites back, for we have no means of determining whether or not 'Julius Caesar' is the object that satisfies the equivalence class of all sets of two. To see why, let us call x the number-object we assert about the concept 'Jupiter's moons.' To be the referent of 'The number of Jupiter's moons', x may be:
>
> (i) equal to its pair y, the purported referent of "2 + 2", or
>
> (ii) it must be possible for "2 + 2" and "the number of Jupiter's moons" to be in a one-to-one correlation.
>
> As one can readily see, these conditions are not able to rule out some queer choice of objects as referents, for any singular term is a possible choice here. Syntactically, we write correctly "2 + 2 = 4", but the principle does not bar us from stating that the object referred to by the expression "2 + 2" is Julius Caesar. (BARCO, p.28-30, 2018).

Sobre essa possibilidade de objeção à concepção fregiana de número, gostaria de comentar o seguinte: a equinumeracidade entre 1 e 1 não se constitui, até esse momento da argumentação fregiana (em que Frege menciona o "problema Júlio César" em §56)[64], como uma definição de 1. A definição de 1 só será apresentada por Frege em §77, e começa assim "§77. Now in order to arrive at the number 1, we have first of all to show that there is something which follows in the series of natural numbers directly after 0" (FREGE, 1980, p.90 / §77) –passagem essa em que Frege chama atenção para a relação de adjacência com o número 0, tal como expomos na seção 2.2 dessa dissertação–. E, portanto, somente através da equinumeracidade (um alvo das críticas), realmente não descobrimos quais seriam as particularidades absolutas do objeto abstrato "número" em comparação com outros objetos. Mas, o conceito de número de Frege não envolve somente a noção de equinumeracidade. Apenas a equinumeracidade não seria capaz de preencher os requisitos para alcançar uma identidade para os conceitos de 1 e 0 sem se utilizar de noções articuladas a magnitudes físicas como ocorre em Kant, ou Mill. De fato, outras noções lógico-filosóficas também foram necessárias, como de extensão, objetividade, cardinalidade, e também sobre o caráter puramente analítico (como Frege defende) das proposições matemáticas.

A partir, então, do que Frege chama de um "crude example" (FREGE, 1980, p.68 / §56)[65], que aparece num instante ainda preparatório para sua definição dos números naturais,se tornou comum ver esse "crude exemple" como um problema catastrófico, então chamado de "problema Júlio César"; que é possível de ser resumido da seguinte maneira: como os números podem ser distinguidos de outros tipos de objetos? O sistema fregiano pode prover os meios para essa distinção?

Na obra como um todo, como bem nota Barco, o "problema Júlio César" aparece apenas para exemplificar "definições contextuais"[66]. Uma definição contextual de "Júlio César" pode exigir definições como: Júlio César é definido por ter 20 dedos; ou então que "Júlio César" possa ser uma forma de medir, assim como "uma jarda" é medida em função da

---

[64] Momento em que Frege se questiona se "any concept has the number Julius Caesar belonging to it"(FREGE, 1980, p.68 / §56).

[65] "but we can never—to take a crude example— by means of our definitions (definições essas que Frege resume de Leibniz; e que ele argumenta de forma complementar, porém critica também, desde a seção 6§) decide whether any concept has the number Julius Caesar belonging to it, or whether that same familiar conqueror of Gaul is a number or is not. Moreover we cannot by the aid of our suggested definitions prove that, if the number a belongs to the concept F and the number b belongs to the same concept, then necessarily a = b (FREGE, 1980, p.68 / §56).

[66] Segundo Bandeira, esse tema (entendido também como sobre o "princípio do contexto") aparece primeiro na intordução de *Os Fundamentos da Aritmética*(1884) quando Frege comenta: "nunca perguntar pelo significado de uma palavra isoladamente, mas somente no contexto de uma proposição" (FREGE apud BANDEIRA, 2004, p.45). Ao meu ver, entendo que o princípio do contexto se adequa a filosofia da matemática de Frege da seguinte maneira: uma vez que os números sejam entendidos como objetos classificatórios então poderíamos sempre nos perguntar em qual contexto de classificação eles estão sendo usados, i.e., se eles estariam sendo empregados em seu sentido cardinal, ordinal, ou apenas num outro linguístico (como quem classifica grupos diferentes de "grupo 1", "grupo 2", "grupo 3").

distância do nariz e o polegar do braço estendido do rei Henrique I da Inglaterra (fazendo com que o rei Henrique I participe da definição de jarda). Fato é, que, até dado momento da argumentação, Frege ainda não tinha chegado às definições dos números naturais quando indaga se "any concept has the number Julius Caesar belonging to it" (FREGE, 1980, p.68 / §56) –assinalando assim que Júlio César poderia participar [67] da definição de 1, assim como"100.000" pode participar de "Mar do Norte", ou também da definição de algum prêmio de loteria–. Mas, quando Frege alcança a definição dos números naturais ele nos entrega uma definição livre de qualquer noção empírica, e deriva, inclusive a série crescente desses números, sem incluir, de forma alguma, Júlio César em sua definição dos números naturais.

Parece-me, diante do exposto até aqui, que há um entendimento implícito por parte de quem defende o "problema Júlio César" como um problema; isto é, por parte de quem questiona a viabilidade do projeto de Frege para definir os números naturais. Esse entendimento, penso eu, seria o seguinte: "os números naturais se comportam como objetos inconformáveis a sistemas formais como o de Cantor ou Frege". Contudo, essa "inconformidade" entre os números e sistemas formais lógicos não se verifica. A própria *Teoria dos Conjuntos* (1874), por si só, por exemplo, fora competente o suficiente para promover classificações importantes sobre os números (como sobre os números transfinitos). E, portanto, é possível que quem defende o problema Júlio César como um problema negligencie, ao fazer isso, a conformidade entre os números naturais e os conjuntos de Cantor. Essa conformidade, inclusive, se evidenciava, para Frege, por exemplo, na semelhança entre o caráter classificatório (i.e., de tomar elementos em classes) do sistema formal de Cantor, e o caráter classificatório dos números naturais. Afinal, para Frege, um número seria um objeto classificatório uma vez que todo "statement of number is an assertion about a concept" (FREGE, 1980, §46), e, portanto, na frase "10.000 milhas do Mar do Norte", o número "10.000" seria uma classificação.

2.2.2 Considerações Sobre a Leitura de Frege Promovida Por Dummett

Michael Dummett foi um filósofo inglês dos mais influentes de sua geração. Dentre outros tópicos importantes trabalhados por ele, segundo Murphy, Dummett discutiu a dicotomia entre realismo e anti-realismo através da noção chave da bivalência[68]; e, como um

[67] Na seção §93, diz Frege: "number can be objects in common (relevant) to many (other objects)" (FREGE, 1980, p.105 / §93).
[68] Segundo Murphy, (…) for Dummett, the championing of anti-realism meant a rejection of the realist principle of bivalence — the idea that any sentence which attempts to make an assertion must be either true or false. Dummett held that this was not the case for sentences that discuss certain subjects — for example, mathematics" (MURPHY, 2019).

todo, suas ideias sobre realismo e anti-realismo envolviam “all of the following fields: philosophy of mathematics, philosophy of logic, philosophy of language and metaphysics” (MURPHY, 2019). Nessa dissertação, no entanto, veremos uma interpretação de Dummett sobre Frege das mais debatidas e controversas. Dummett desenvolve sua interpretação nas obras:*Frege: Philosophy of Language* (1973), *The interpretation of Frege’s Philosoph*y (1981), *Frege and Other Philosophers* (1991) e*Frege:Philosophy of Mathematics* (1991). Dentre elas veremos essa última, que é onde Dummett comenta a filosofia da matemática de Frege.

Sobre a interpretação da filosofia da matemática de Frege,“Dummett's argument is relatively straightforward: the interpretation of Frege's philosophy of mathematics must begin and end with the *Grundgesetze”* (HECK, 1993, p.223). Nessa obras, *As Leis Básicas da Aritmética* (1884), Frege entendia ter apenas apontado que seria “probable that the laws of arithmetic are analytic judgements and consequently a priori” (FREGE, 1980, p.99 / §87), enquanto que na obra *Os Fundamentos da Aritmética* (1893, 1903), “Frege attempts conclusively to establish his claim that arithmetic is a branch of logic” (HECK, 1993, p.223). Para Dummett, nessas duas obras, Frege procurava defender uma filosofia da matemática exclusivamente “racionalista” para o estatuto ontológico da aritmética, contudo, no entendimento de Dummett isso seria um erro.

Primeiro lembremos que: Frege entende que se “a justification of a proposition consists in a derivation of it from fundamental truths, which neither need nor admit of proof” (HECK, 1993, p.224), e se essa “justification of a given proposition appeals only to 'primitive truths' which are general logical truths” (HECK, 1993, p.224), então, a justificação é analítica. Enquanto que, se a justificação não ocorrer desse modo, “if there is a justification which appeals to general truths concerning a particular subject-matter, say, laws of geometry, then the proposition is synthetic” (HECK, 1993. p.224); e, também, “it is *a posteriori*” (HECK, p.224). Em suas palavras, diz Frege:

> (…) distinctions between a priori and a posteriori, synthetic and analytic, concern, as I see it,1 not the content of the judgement but the justification for making the judgement. Where there is no such justification, the possibility of drawing the distinctions vanishes. (...) If, in carrying out this process, we come only on general logical laws and on definitions, then the truth is an analytic one (...). If, however, it is impossible to give the proof without making use of truths which are not of a general logical nature, but belong to the sphere of some special science, then the proposition is a synthetic one (FREGE, 1980, p.3-4 / §3).

E, sobre a existência dessas “verdades primitivas”, diz Frege:

> If we recognize the existence of general truths at all, we must also admit the existence of such primitive laws, since from mere individual facts nothing follows, unless it be on the strength of a law. Induction itself depends on the general proposition that the inductive method can establish the truth of a law, or at least some probability for it. If we deny this, Induction becomes nothing more than a psychological phenomenon, a procedure which induces men to believe in the truth of a proposition, without affording the slightest justification for so believing (FREGE, 1980, p.3-4 / §3).

E, portanto, assim como vimos durante todo esse capítulo 2, parecia ser suficiente para Frege pensar sobre qual seria a natureza de verdades lógicas (analítica ou sintética), e também sobre qual seria a melhor forma de fazer corresponder essa natureza à sua fundamentação (que para ele seria através da lógica simbólica). Ou seja, para ele, a fundamentação da aritmética poderia se provar puramente analítica, e poderia lidar com "verdades primitivas" e "proposições sem justificativa", uma vez que elas fossem tomadas no cálculo proposicional. O que pode ocorrer, de um ponto de vista formalista, sem nenhum problema. Porém, para Dummett, esses entendimentos de Frege estavam incompletos, pois, como ele assinala:

> (…) for, first, what exactly is a 'primitive' truth? When (...) does a proposition 'neither need nor admit of proof'? And what is the difference between primitive truths which are general logical truths and those which are general non-logical truths? Explanations of these distinctions are needed, without which Frege's account is at best incomplete (DUMMETT, 1995, p. 24-25).

Nessa passagem, é possível ver o intuito de Dummett de enxergar onde seria possível propor mais entendimentos sobre juízos analíticos para blindar melhor a filosofia da matemática de Frege contra o que ele entende serem algumas fraquezas cruciais. Além de outra questão (3) que veremos nesse subcapítulo, as duas principais questões de Dummett seriam:

(1) Existem realmente proposições que não necessitam de prova?

(2) Existiria uma distinção entre verdades lógicas e não lógicas?

Para Dummett, haveria uma série de dificuldades no projeto fregiano, e uma possível solução é dada na seção "A non-Fregean answer" (DUMMETT, 1991, p.312). Nessa seção, ele faz apelos para uma invasão empirista da fundamentação fregiana.

> Logicism, as represented first by Frege and then by Russell and Whitehead, failed because it combined three incompatible aims:to keep mathematics uncontaminated by empirical notions; to represent it as a science, that is, as a body of truths, and not a mere auxiliary of other sciences and to justify classical mathematics in its entirety (DUMMETT, 1991, p.312).

Por conta disso, me parece que Dummett flerta com uma fundamentação que tente não distinguir verdades lógicas e verdades não lógicas, como que através de uma proposta de guinada ao empirismo; o que alcançaria, então, uma resposta para a questão (2): existiria uma distinção entre verdades lógicas e não lógicas? De modo que seria possível para Dummett que não haveria uma distinção. Contudo, a ideia de que a fundamentação da matemática deveria procurar noções empíricas que justifiquem o formalismo matemático é muito estranha se partimos do ponto de vista fregiano, que, como vimos nos subcapítulos anteriores (2.1 e 2.2), rompeu com o psicologismo, e concluía, por exemplo, de forma muito consistente (ou válida dentro da irresolução por uma única filosofia da matemática consensual) que: "For a proposition to be true is just not the same thing as for it to be thought" (FREGE, 1980, §77 / p.91). Ou seja, que ao contrário dos objetos puramente psicológicos (e empíricos), não basta que algo seja pensado, ou exista, para ser verdadeiro em lógica.

Sobretudo, seríamos muito precipitados se pensarmos sobre o traço racionalista de Frege como responsável por seu "fracasso". Afinal, Frege fez com que correntes filosóficas históricas se tornassem suas concorrentes até hoje. E, por esse motivo, acho difícil enxergar um "fracasso". Embora, de fato, a partir dos *Teoremas de Gödel* (1931) tenha sim se firmado definitivamente o sentimento de incompletude no projeto logicista (sentimento esse que surgiu primeiro com oParadoxo de Russell). Contudo, também acho importante lembrar que os *Teoremas de Gödel* (1931) ainda participam de um debate polêmico possibilitado pela obra *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956) de Wittgenstein (como já fora pontuado muitas vezes nessa dissertação;como, por exemplo, a nota de rodapé 12, 31 e 32).

Essa sensação de incompletude (ainda irresolvida na história da fundamentação da matemática), como na passagem a seguir, parece ser apropriada por Dummett, lhe autorizando desenvolver uma de suas principais questões; a questão (1):

> (…) for, first, what exactly is a 'primitive' truth? When (...) does a proposition 'neither need nor admit of proof'? And what is the difference between primitive truths which are general logical truths and those which are general non-logical truths? Explanations of these distinctions are needed, without which Frege's account is at best incomplete (DUMMETT, p. 24-25, 1995).

No entanto, Gödel nem chega a ser citado em sua obra *Frege:Philosophy of Mathematics* (1991). E, portanto, é difícil saber que "fracasso" foi esse que Dummett assinala.

Além das duas questões já evidenciadas nesse subcapítulo, as questões (1) e (2), Dummett também tenta se aproximar de outra. Como assinala Heck:

> Dummett is not satisfied with Frege's argument that numbers are objects. He approaches Frege's argument by asking whether it is possible to define numbers as second-order quantifiers (HECK, p. 228, 1993).

Sobre essainsatisfação de Dummett concordo com Heck:

> Frege's observation that we count numbers as well as objects of other kinds thus has more force than Dummett allows it. One may object that we might just as well argue that we can form sets of sets as we can number numbers, so we must be able to form the set of all sets. This is, indeed, the sort of objection Dummett might be expected to raise, since he is constantly concerned with the formal similarities between Frege's definition of cardinal number and his infamously inconsistent Axiom V (HECK, p. 231, 1993).

Isto é, concordo que essa questão posta por Dummett, de saber "se números poderiam ser definidos como quantificadores de segunda ordem", como uma questão reativa demais em relação ao Axioma V, também comumente endereçado como Lei Básica Número V, e que, resumidamente, como expõe Zalta, é uma lei que assume que: "the course-of-values[69]of the function *f* is identical to the course-of-values of the function *g* if and only if *f* and *g* map every object to the same value" (ZALTA, 2019). E, segundo Heck, essa lei "leads to Russell's Paradox and thus causes the concept-script to collapse into inconsistency" (HECK, 2012), pois o *Paradoxo de Russell* (1902) é alcançado ao se tentar mapear (reunir em um conjunto) os conjuntos que não pertencem a si mesmos, e então não se consegue resolver se esse conjunto pertence ou não a si mesmo. E por conta do *Paradoxo de Russell* (1902), então, a questão da predicação entre conjuntos se torna um bom alvo para a crítica de Dummett.Essa percepção de Dummett é resumida por Clark e Boolos na seguinte passagem:

> Chapter 17 of Michael Dummet's *Philosophy of Mathematics* begins with the question: how did the serpent of inconsistency enter Frege's paradise? In the section of that chapter called 'How the serpent entered Eden' Dummett says, 'The second order quantifier presents an altogether different problem, and it is to its presence in Frege's language that the contradiction is due' (DUMMETT apud CLARK e BOOLOS, 1993, p.213).

.

Ou seja, para Dummett era importante saber se seria possível escapar da predicatividade[70] inerente à lógica de segunda ordem, e como percebe Heck, também inerente à *Teoria dos Conjuntos*(1874). Portanto, o assunto da predicatividade lhe parece crucial, e se

---

[69] Os eixos x e y de uma função no plano cartesiano, por exemplo, podem, ambos, conter a ordem crescente dos números naturais (ou, em outras palavras, conter o "curso de valores" dos números naturais), uma vez que os objetos que eles predicam (como largura e altura de uma figura geométrica) comportem uma indicação de valor semelhante à ordem cresscente dos números naturais.

[70]Também questionada por Poincaré, como veremos no capítulo 4.

constitui como uma questão muito importante. Podemos colocar essa questão da seguinte maneira:

(3) Podem os números se comportar como funções predicativas de segunda ordem?

Sobre esse assunto entendo ser necessária uma defesa da predicatividade utilizada por Frege (e inspirada na teoria de Cantor)[71]; pois, talvez não ocorra nenhumproblema caso números se comportem como quantificadores de segunda ordem (ou, como elementos que pertencem a conjuntos). Afinal, a*Teoria dos Conjuntos*(1874) apresenta um sistema formal qualificado o suficiente para ter sua ferramenta principal, os "conjuntos", sendo assinalados como uma ferramenta lógica e matemática válida. Afinal, essa ferramenta é fundamental no tratamento da "aritmética transfinita", e, na lógica, ela une o melhor de dois mundos (lógica de primeira e segunda ordem). De acordo com Väänänen,

> Second-order logic has a subtle role in the philosophy of mathematics. It is stronger than first order logic in that it incorporates "for all properties" into the syntax, while first order logic can only say "for all elements". At the same time it is arguably weaker than set theory in that its quantifiers range over one limited domain at a time, while set theory has the universalist approach in that its quantifiers range over all possible domains (VÄÄNÄNEN, 2019).

De fato, a *Teoria dos Conjuntos*(1874) possibilita que elementos possam predicar outros(predicar no sentido de como uma trena é capaz de nos habilitar a predicar outros objetos; ou seja, quando a mesma indica, por exemplo, "quantos centímetros tem uma mesa"). Essa possibilidade, de certo modo, foi também o que estruturou a lógica de segunda ordem de Frege.Assim como, como destaca Väänänen, poderia estruturar uma "lógica" de qualquer número de "ordens": isto é, seria capaz de estruturar um sistema formal onde existam conjuntoscom elementos que possam ser conjuntos de conjuntos de conjuntos...Exatamente como ocorre, por exemplo, na *Teoria dos Tipos* de Bertrand Russell, apresentada no *Principia Mathematica* (1910).

Porém, como bem se percebe ao longo desses dois últimos subcapítulos, uma das maiores contribuições de Frege (o cálculo proposicional de segunda ordem) é também visto como um elo fraco de seu projeto por interpretações que enxergam "demasiada abertura predicativa".Isto é, há quem veja uma exagerada abrangência nas possibilidades do que, afinal, os conjuntos podem predicar. Visão esta com a qual não concordo, pois, afinal será que essa "demasiada abertura predicativa" não se reduz quando temos uma definição de números como

---

[71] De onde Frege se apropria, por exemplo, do conceito de cardinalidade (que está presente, inclusive, em sua definição dos números naturais, tal como exposto na seção 2.2).

a dada por Frege? As definições que Frege estabelece para os números naturais garantem, como vimos anteriormente(na seção2.2), que cada número natural tenha uma identidade[72] (uma caracterização por uma certa identidade fixa); e,exatamente por apresentar essa característica: de garantir, digamos assim, uma identidade a cada número, sua definição para os números naturais até poderia ser vista como coerente (em relação ao traço analítico de sua filosofia da matemática) elimitada, pois, encontra apenas uma correspondência[73]entre uma linguagem lógica e uma linguagem aritmética,e, portanto poderia até não serentendida como tão aberta(isto é, poderia entendida comopoucoampla, ou pouco profunda).

Diante do exposto até aqui, entendo que se há uma inconsistência que invadiu o paraíso de Frege, parece-meque em nada ela tem a ver com a definição de número. Talvez essa “inconsistência” seja, na verdade, um sentimento de inconsistência que surge com o Paradoxo de Russell. Porém, esse paradoxo ainda desafia os lógicos a uma solução. De modo que não é possível dizer que o “paraíso de Frege” é inconsistente estando ainda em suspensão a *Teoria dos Conjuntos*(1874) em razão do *Paradoxo de Russell* (1902).

2.2.3 Resumo:

Sobretudo, não é fácil resumir a seção 2.1, mas esses dois pontos também não poderiam deixar de ser destacados: (1) o psicologismo (muito inspirado em Mill) e o kantismo parecem seguir uma tradição filosófica que alicerça a fundamentação da matemática a elementos empíricos(como por exemplo, com relação à importância do conceito de espaço em Kant, ou mesmo em Mill através da correspondência de cada número a fatos físicos), e (2) ambas essas formas de alicerçar a fundamentação da matemática a elementos empíricos são rejeitadas por Frege (que tenta resolver as questões da fundamentação da matemática de forma puramente analítica).

E também, com relação a seção 2.1 e ao capítulo anterior, gostaria que fosse observado que o empirismo (tal qual o empregado pelos psicologistas) parece ser uma constante na epistemologia, ou seja, não deveria ser entendido como algo defasado, mas com

[72]Essa aparência de identidade é comentada também por Frege na seguinte passagem, onde ele pensa que uma noção de identidade se torna possível através do emprego da noção equinumeracidade (e que mais tarde também, de forma complementar, através de outras noções como a de extensão e adjacência, ele forma mais completamente a sua definição dos números naturais): (…) if we treat the possibility of correlating one to one the objects falling under the concept F with the objects falling under the concept G as an identity, by putting for it: "the Number which belongs to the concept F is identical with the Number which belongs to the concept G", thus introducing the expression "the Number which belongs to the concept F", this gives us a sense for the identity only if both sides of it are of the form just mentioned (FREGE, 1980, p.117 / §18).

[73] Ou, como veremos na seção 3.3, Frege soube justificar uma “tradução” de uma linguagem para outra. De modo que, como aponta Poincaré, somente com isso, ele não encontra quais seriam as proposições fundamentais da aritmética; isto é, que digam por exemplo por quê os números 1, 2, ou 3 são possíveis.

potencial inclusive para ser visto como atual e complexo. Afinal, vimos, por exemplo, no capítulo 1, que Quine seria capaz defender uma postura empirista na filosofia da matemática ainda na segunda metade do século XX, e também muitas possibilidades na filosofia da matemática podem reaparecer com traços empiristas, ou até mais especificamente, com traços psicologistas inclusive. Vide, por exemplo, leituras da psicologia comportamental sobre o aprendizado da matemática[74].

Já nasseções 2.2, 2.2.1, e 2.2.2foi apresentadoa concepção de número natural de Frege, e, em seguida, tentei entender como a leitura de Dummett sobre o projeto fregianocompreende essa concepção de número. E, em comentário a leitura de Dummett, questionei se a defesa do "problema Júlio César" como um problema atual e relevante implicaria de fato em uma contradição grave na argumentação de Frege. E, diante do exposto, considerei provável que a defesa do problema Júlio César como um problema atual e relevante seja na verdade fruto de uma leitura que se prende muito à primeira parte de *Os Fundamentos da Aritmética*(1884).

E tambémao analisar duas leituras de Barco e Dummett,constatei que Frege seria bem defendido dessas leituras fazendo-se uma defesa da *Teoria dos Conjuntos* (1874), ou reinterpretando o *Paradoxo de Russell* (1902). Afinal, de existem boas evidências que apontam para esses caminhos como sugeri sempre que possível nessa dissertação (e não somente nesse capítulo 2); como quando menciono os trens de Sendai, ou a polêmica que envolve a obra *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956) de Wittgenstein. Essas sugestões, contudo, não foram trabalhadas de forma central no texto dessa dissertação (sendo sustentadas apenas pontualmente), pois também não era o objetivo último dessa dissertação sugerir uma interpretação dos Paradoxos de Russell, ou mesmo defender a teoria de Cantor.

[74] Incluo aqui como exemplo o texto *The Psychological Foundations Of Mathematics* (1967) do pesquisador francês Patrick Suppes.E, também, o enativismo (corrente dentro das ciências cognitivas que une epistemologia e teoria da mente), como um todo, parece estar próximo da abordagem psicologista.

CAPÍTULO 3: A Filosofia da Matemática de Poincaré

Como vimos nos capítulos anteriores, entre o século XIX e XX, a matemática amadurecia novos e antigos modelos. Surgiram, por exemplo, estudos aprofundados sobre o conceito de número e função, novos axiomas para a fundamentação da aritmética, surgia a *Teoria dos Conjuntos* (1874) de Cantor, abordagens naturalistas da matemática, e também eram reconsiderados os axiomas fundamentais da geometria euclidiana. Com esses estudos abriam-se novas possibilidades para a filosofia da matemática, e também surgiam algumas divergências que fizeram com que a filosofia da matemática se dividisse em três grandes correntes: logicismo, formalismo e intuicionismo. Essa divisão, por sua vez, gerava uma discussão multilateral sobre a validade das alternativas de fundamentação da matemática, e, dentre outros nomes, um dos matemáticos mais famosos que participou dessa discussão foi Poincaré.

Dado o prestígio de Poincaré no meio científico, é de se imaginar que suas ideias reverberavam com muita facilidade nesse meio. Afinal, Poincaré era reconhecido como o último cientista universalista, uma vez que ele contribuiu para muitas disciplinas da ciência. Em resumo, de acordo com Folina,

> Jules Henri Poincaré (1854-1912) was an important French mathematician, scientist and thinker. He was a prolific mathematician, publishing in a wide variety of areas, including analysis, topology, probability, mechanics and mathematical physics. He also wrote popular and philosophical works on the foundations of mathematics and science (FOLINA, 2020).

Nesse capítulo, abordarei alguns textos onde a filosofia da matemática de Poincaré é expressa, e pretendo mostrar como que, ao contrapor o logicismo e o formalismo,essa filosofia da matemática foi capaz de produzir críticasque antecederam o estado ainda permanente na filosofia da matemática de suspensão do logicismo e do formalismo (como veremos na seção 3.1). E, por último, comentarei algumas ideias de Poincaré presentes nesses textos.

Tendo esses objetivos em mente, verei duas críticas e uma sugestão de Poincaré para a filosofia da matemática. Sendo elas, respectivamente: (1) a visão de que seria ainda complicado para a lógica classificar objetos infinitos devido à sua natureza meramente classificatória; (2) sua noção de classificações predicativas; (3) e também sua exigência por proposições suficientemente gerais para a fundamentação da matemática. Sobretudo, os principais textos que veremos são: *Lógica da Infinitude*[75] (texto em que ele aborda, dentre outros assuntos, a questão da predicatividade e do infinito na lógica), *A Natureza do Raciocínio Matemático*[76] (onde encontramos algumas de suas considerações gerais sobre a matemática e a lógica), e *ORaciocínio Matemático*[77] (onde ele faz considerações sobre o logicismo e formalismo).

3.1 Duas Críticas de Poincaré ao Logicismo e Formalismo

Embora as críticas e sugestões de Poincaré sejam encontradas em diferentes textos, elas são complementares em alguns aspectos. Nesse capítulo, inclusive, veremos trechos de dois textos que podem ser vistos como semelhantes. Sendo eles os textos: *Lógica da Infinitude*e *O Raciocínio Matemático*. Ambos esses textos são escritos após 1905. Momento esse em que a escrita de Poincaré era bastante reativa ao *Paradoxo de Russell* (1902) e à Hilbert. E, portanto, esses dois textos são também muito próximos, pois, foram, de fato, construídos como respostas críticas ao logicismo, e ao formalismo. Segundo Del Vecchio, os textos desse período:

> (...) têm o intuito de apontar os problemas decorrentes do logicismo defendido por Couturat e Russell, assim como os da concepção formalista de David Hilbert apresentada em agosto de 1904, por ocasião do Terceiro Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Heidelberg (DEL VECCHIO, 2013, p.402).

---

[75] Quarto capítulo da obra *Dernières Pensées* (1912) que foi traduzida para o inglês como *Mathematics and Science: Last Essays* (1913). Nessa obra são reunidos alguns dos últimos artigos e de Poincaré.
[76] Primeiro capítulo da obra *La Science et l'Hypothèse* (1902).
[77] Segundo capítulo da obra *Science et Methode* (1908).

Consideremos, então, o texto *Lógica da Infinitude*. Nesse texto, Poincaré, em resposta direta a Russell, une muitos de seus principais argumentos que constituem sua filosofia da matemática. Em resumo, ele argumenta em defesa da tese de que as regras da lógica, quando aplicadas à matemática, geram contradições insuperáveis. Isso ocorre, segundo Poincaré, porque a lógica seria nada mais que "the study of properties common to all classifications" (POINCARÉ, 1913, p.45) e as antinomias, assim como ele entende ser o *Paradoxo de Russell* (1902), aparecem, pois "a classification was relied on which was not immutable and which could not be so" (POINCARÉ, 1913, p.45); isto é, feitas sob os objetos matemáticos. E mesmo que logicistas, como Russell, tentassem defender suas classificações como imutáveis (ou, então, como "consistentes"), para Poincaré, os objetos matemáticos não caberiam nessas classificações, pois não seriam imutáveis. Esses objetos matemáticos, seriam, para ele, frutos da criação humana, e estariam sujeitos, inclusive, a novas descobertas (ou invenções[78]), e, assim, sujeitos a classificações *não predicativas* (noção que iremos expor ainda nesse subcapítulo).

Desde o início desse texto, *Lógica da Infinitude,* Poincaré se utiliza de um bom número de metáforas e comparações que tratam a lógica como "um estudo das classificações", e interpreta a capacidade da lógica de classificar a matemática como limitada. Essas metáforas e comparações procuram demonstrar que as dificuldades (e por *dificuldade* leia-se "os paradoxos, ou antinomias encontradas pelos logicistas") tornar-se-iam sempre evidentes quando a lógica trata de coleções infinitas (como ocorre, segundo ele, no caso da coleção dos entes matemáticos). Sobre isso, Poincaré faz uma metáfora importante na seguinte passagem:

> These *difficulties* will be encountered even more frequently when infinite collections are involved. Let us suppose that it is desired to classify the elements of one of those collections and that the principle of the classification rests on some relation of the element to be classified with the entire collection. Can such classification ever be considered determined? There is no actual infinity, and when we speak of infinite collection, we understand a collection to which we can add new elements unceansingly (similar to a subscription list which would never end, waiting for new subscribers) (POINCARÉ, 1913, p.46-47).

E, portanto, segundo ele, não seria possível uma classificação permanente sobre "a relação entre elementos de uma lista que não cessa de incluir novos elementos".Ou seja, haveria ainda uma dificuldade para a lógica tratar dos fundamentos da matemática.A inclusão

---

[78] São muitos pontos conectados por esse texto (Lógica da Infinitude), e alguns desses pontos são mais extensamente abordados em outros textos. Como, por exemplo, a questão da inventividade dos matemáticos na filosofia da matemática. Inclusive, esse assunto da inventividade é muito importante na filosofia da Poincaré. Contudo, é um assunto é mais extensamente trabalhado em outros textos mais propositivos (não tão críticos), e que dizem a respeito ao seu intuicionismo. Por isso, veremos esse assunto somente na seção 3.3.

de novos entes na matemática poderia dificultar as relações de definição. E não é difícil perceber como já surgiram muitas vezes, na história da matemática, novos entes como: os números irracionais, números imaginários, o próprio número 0 e etc. Sobretudo, Poincaré mostra que estando a matemática aberta para novas possibilidades (aberta para o surgimento de novos entes), então a abordagem logicista sobre essas possibilidades na matemática seria sempre “potencial” e não “real”. Tal percepção de Poincaré, parece sugerir que seria muito difícil para aabordagem logicista se provar suficientemente completa.

Ressalto também que, para Poincaré, não só a quantidades de entes matemáticos poderia ser infinita, mas a quantidade de novas características a serem descobertas sobre os entes matemáticos poderia ser infinita também. Essa questão do infinito, inclusive chega a ser mencionada noutro texto (o que bem exemplifica a semelhança e homogeneidade entre os textos filosóficos de Poincaré). Diz Poincaré:

> There is no actual infinity, the Cantorians have forgotten that, and they have fallen into contradiction. It is true that Cantorism rendered services, but that was when it was applied to a real problem whose terms were clearly defined, and we could walk safely (POINCARÉ, 1914, p.195).

Desse modo, para Poincaré, dada uma coleção infinita de objetos a serem classificados, as ferramentas classificatórias desses objetos (ferramentas como conjuntos, ou funções predicativas), seriam capazes apenas de dois tipos de classificação: classificações predicativas e não predicativas. Essa distinção é muito importante e é feita por ele na seguinte passagem, que depois é seguida de um exemplo em que se aplica as definições de classificações predicativas e não-predicativas:

> As long as there are new elements to be introduced, it is to be feared that the work may have to be begun all over again; for it will never happen that there will not be new elements to be introduced; the classification will therefore never be fixed. From this we draw a distinction between two types of classifications applicable to the elements of infinite collections: *predicative* classifications, which cannot be disordered by the introduction of new elements; the *non-predicative* classifications in which the introduction of new elements necessitates constant modification.
>
> Let us suppose for example that we classify the integers into two families according to their size. We can recognize whether a number is greater or less than 10 without having to consider the relations of this number with the set of the other integers. Presumably, after the first 100 numbers have been defined, we shall know which among them are less than and which are greater than 10. When we then introduce the number 101, or any one of the numbers which follow, those among the first 100 integers which were less than 10 will remain less than 10, those which were greater will remain greater; the classification is predicative.
>
> On the contrary let us imagine that we want to classify the points in space and that we differentiate between those which can be defined in a finite number of words and those which cannot. Among the possible sentences, there will be some which will refer to the entire collection, that is, to space or else to some portions of space. When we introduce new points in

> space, these sentences will change in meaning, they will no longer define the same point; or they will lose all meaning; or else they will acquire a meaning although they did not have any previously. And then points which were not definable will become capable of being defined; others which were definable will cease to be definable. They will have to change from one category into another. The classification will not be predicative (POINCARÉ, 1913, p.47-48).

Para ele, as classificações da lógica sobre os objetos matemáticos deveriam se mostrar predicativas caso as mesmas se pretendam consistentes (ou, "imutáveis", como ele prefere). Contudo, como vimos em sua definição de classificação predicativa, essas classificações da lógica não deveriam depender da relação dos objetos matemáticos com possíveis outros elementos da matemática. E, como ele ressalta, isso não parece ter sido satisfeito por estudiosos da filosofia da matemática (logicistas e formalistas). E, de fato, futuramente (como veremos ainda nesse subcapítulo), Poincaré se provaria certo quanto ao fato de a ausência de classificações predicativas a serem produzidas pela lógica sobre a matemática se tornar um problema na fundamentação da matemática.

Até aqui, pode-se ver que Poincaré faz (1) uma leitura da lógica através da "predicatividade"; (2) uma leitura intuicionista da matemática (como adiantamos muito brevemente no subcapítulo 1.3 e veremos mais detalhadamente no subcapítulo 3.2); e expõe (3) uma questão com relação ao infinito potencial dentro da lógica. Agora, veremos como os itens (1) e (3), que seriam também as "duas críticas" às quaiso título desse subcapítulo se refere, coaduna com os resultados alcançados por Gödel em 1931. Como Gray bem explicita,

> Poincaré was critical of attempts to reduce all of mathematics to symbolic logic (as advocated by Bertrand Russell in England and Louis Couturat in France) and of attempts to reduce mathematics to axiomatic set theory. In these beliefs he turned out to be right, as shown by Kurt Gödel in 1931 (GRAY, 2019).

Ou seja, tudo que Poincaré objetivava a respeito do emprego de alguns métodos na filosofia da matemática se aproximou muito do resultado encontrado por Gödel. Mas, para melhorevidenciarmos os pontos de contatoentre a incompletude de Gödel e essas críticas de Poincaré, lembremos primeiro dos *Teoremas de Gödel* (1931).

Tal como exponho na "Imagem 1", no primeiro teorema, Gödelassocia números inteiros a um vocabulário lógico adaptado do *Principia Mathematica* (1910) que pode formalizarqualquer sentença lógica.No lado direito da"Imagem 1" podemos ver alguns exemplos de substituições;e, no lado esquerdo,cada elemento de uma frase lógica é associada a números da aritmética, de modo que, ao final de todo o esquemacada frase lógica é remetida a um único número (imagem 2); isto é, ao final das operações de multiplicação e potenciação deve-se encontrar apenas um número.

Imagem 1:

Signos Constantes	*Número de Gödel*	*Significado*
~	1	não
∨	2	ou
⊃	3	Se... então...
∃	4	Existe um
=	5	é igual
0	6	zero
s	7	O sucessor imediato
(	8	de marca de pontuação
)	9	marca de pontuação
,	10	marca de pontuação

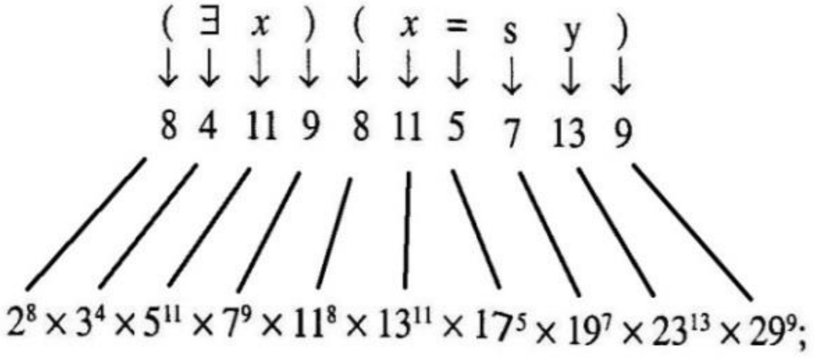
Variável Sentencial	*Número de Gödel*	*Exemplo de Uma Possível Substituição*
p	11^2	$0 = 0$
q	13^2	$(\exists x)(x = sy)$
r	17^2	$p \supset q$

As variáveis sentenciais estão associadas aos quadrados de números primos maiores que 10.

Variável Predicativa	*Número de Gödel*	*Exemplo de uma Possível Substituição*
P	11^3	Primo
Q	13^3	Composto
R	17^3	Maior do que

(NAGEL e NEWMAN, 2015, p. 73).

Imagem 2:



(NAGEL e NEWMAN, 2015, p. 63).

Na imagem acima (Imagem 2), cada signo lógico é associado por Gödel a um número inteiro (assim como vimos na imagem 1), de modo que o “(” é associado ao 8, “)” ao 9, “x” ao 11, e etc. Em seguida, cada um dos números associados aos signos lógicos elevarão um número primo em sequência progressiva conforme sua posição na frase lógica (imagem 2). Dessa forma, o 8 elevará o 2 (que é o primeiro número primo na ordem crescente dos números primos), o 4 elevará o 3 (que é o segundo número primo na ordem crescente dos números primos), e etc.Como resultado da expressão matemática será formado então umnúmero que só é possível de ser fatorado de acordo com a ordem crescente dos números primos, quais, por sua vez, indicam, em suas respectivas potências, os signos lógicos e também a ordem desses mesmos signos na frase lógica. Desse modo, qualquer frase lógica poderia ser representada por um único número na aritmética. E, assim, também, o objetivo de corresponder uma linguagem lógica diretamente à matemática (mais especificamente à aritmética) parecia se cumprir.

Vale lembrar, também, que essa associação entre números primos e frases lógicas só foi possível, ou mesmo "válida", pois os números primos já haviam sido provados infinitos. Segundo Paulo Ribenboim, em seu livro *The Book of Prime Numbers Records* (1995), existem mais de 7 demonstrações que comprovam que a quantidade de números primos é infinita. Algumas das demonstrações reportadas por ele em seu livro são asde Euclides, Goldbach, Euler, Thue, Washington e Fürstenberg.

Desse modo, então, em seu artigo de 1931, Gödel construiu uma relação capaz de relacionar a aritmética básicaasentenças lógicas bem formadas. Até aqui, um logicista, ou formalista, poderia imaginar que seria provado que ambas disciplinas (lógica e matemática) seriam consistentes e capazes de participar mutuamente de suas fundamentações (afinal, ambas as linguagens: aritmética e lógica, secompatibilizavamatravés do esquema de Gödel). No entanto, imagine formar nesse esquema uma proposição que afirme *é verdade que esta proposição fundamental é indemonstrável*, e ao mesmo tempo formar também sua negação formal: *não é verdade que esta proposição fundamental seja indemonstrável*. Ao tomarmos ambas ao mesmo tempo não saberíamos, afinal, se a proposição em questão é demonstrável, ou indemonstrável. Inclusive, mesmo qualquer proposição fundamental nesses sistemas estaria sujeita à indecidibilidade, uma vez que outras proposições (ainda não demonstradas) poderiam aparecer e contradizertais proposições fundamentais.

Num primeiro momento, a primeira vertente a se sentir abalada pelas conclusões de Gödel foi a axiomática. Afinal, Gödel mostrava que para toda proposição fundamental "G" haveria também uma proposição "oposta" que a nega, tal como "não-G" que poderia contradizer a primeira. E, portanto, não bastaria escolhermos axiomas (proposições fundamentais indemonstráveis) para fundamentarmos um sistema,poisa negação formal desses axiomas também seriam passíveis de serem indemonstráveis.Segundo Newman,

> Gödel (...) showed that G is demonstrable if, and only if, its formal negation ~G is demonstrable. This step in the argument is again analogous to the step in the Richard Paradox in which it is proved that n is Richardian if, and only if, n is not Richardian. However, if a formula and its own negation are both formally demonstrable, then PM (Principia Mathematica) is not consistent. Accordingly, if PM is consistent, neither G nor ~G can be formally derivable from the axioms. In short, if PM is consistent, then G is a formally undecidable formula (NEWMAN, 2001, p.93).

Dessa forma, tanto como defendido por Poincaré, quanto mais tarde comprovado por Gödel,as vertentes formalistas e logicistas foram incapazes de promover proposições fundamentais e seguramente consistentes para a fundamentação da matemática. Sendo que, no vocabulário dos textos de Poincaré, diferente de Gödel, ele entende que a lógica estaria promovendo "classificações" (e não "proposições fundamentais" como emprega Gödel) que falharam em ser "predicativas" (i.e., seguramente consistentes).

Sobretudo, apesar de coincidirem em suas conclusões, parece haver algumas diferenças técnicas consideráveisentre Gödel e Poincaré. Por um lado, Poincaré parece tomar a matemática como um *sistema formal aberto*, enquanto Gödel alcança resultados que corroborama postura de Poincaré, mas também continua em busca de provas de consistência para a fundamentação matemática. Essas provas de consistência são sugeridas por Gödel através de sua leitura sobre a hipótese do continuum (i.e., a hipótese de que é possível provar a continuidade entre números inteiros de forma consistente). Como indica Koellner, para Gödel

> (...) what was needed were new axioms, axioms that are both justified and sufficient for the task. Gödel actually went further in proposing candidates for new axioms—large cardinal axioms—and he conjectured that they would settle Continuum Hypothesis (KOELLNER, 2013).

E, também, através do segundo teorema, ainda em seu artigo em 1931, Gödel permite pensar que outros possíveis sistemas formais poderiam fundamentar a matemática. De acordo com Hosch, o segundo teorema de Gödel, "shows that a formal system containing arithmetic cannot prove its own consistency"(HOSCH, 2011), mas, essa consistência poderia, talvez, ser provada por outro sistema formal capaz de demonstrar proposições fundamentais que não seriam demonstráveis aritmeticamente. Então, portanto, para Gödel, também é possível ver um grau maior de confiança na possibilidade de se fundamentar satisfatoriamente a matemática de tal modo que ela ainda possa ser percebida como um sistema formal consistente. Segundo Gödel, ainda em seu artigo de 1931, Zermelo e Russell teriam produzido sistemas "so extensive that all methods of proof used in mathematics today have been formalized in them" (GÖDEL, 1992, p.37), apesar de que "in both the systems mentioned there are in fact relatively simple problems" (GÖDEL, 1992, p.38) que não poderiam ser superados segundo as regras desses sistemas. E ele continua:

> This situation is not due in some way to the special nature of the systems set up, but holds for a very extensive class of formal systems, including, in particular, all those arising from the addition of a finite number of axioms (GÖDEL, 1992, p.38).

Esses "simple problems" conduziram a fundamentação da matemática à indecidibilidade, como demonstrado em seu artigo, mas, ainda assim, não impediriama matemática de ser fundamentada por outros tipos de sistemas formais.

3.2 O Intuicionismo de Poincaré

> *"You can only find truth with logic if you have already found truth without it"* (CHESTERTON apud AHLQUIST, 2020)[79].

Akçagüner é autor de um artigo excepcional sobre o intuicionismo de Poincaré. Nesse artigo um dos principais temas é a forma como Poincaré se apropriou da filosofia de Kant. No começo do artigo, Akçagüner contextualiza a relação do kantismo com o pensamento de Poincaré da seguinte maneira: ele sinaliza uma perda de influência do kantismo devido ao advento de duas teorias científicas (a teoria da evolução de Darwin, e o advento da geometria não-euclidiana). E, em seguida, insere Poincaré como um defensor de Kant num momento em que essa perda de influência se dava de novo na matemática (i.e., na fundamentação da matemática). Só então, depois dessa introdução histórica, o autor mostra como a leitura de Poincaré teria essencialmente um traço kantiano evidente: a defesa de que seria possível que formas puras da sensibilidade ainda possam fundar o conhecimento matemático.Segundo, Akçagüner:

> (…) in the course of time, the conviction in the Kantian idea that there exist in our minds frameworks which are independent of experience was weakened in the light of the invention of non-Euclidean geometries and the theory of evolution by natural selection.
> (…) Philosophers were (…) led to question the existence of an a priori framework that our minds imposed upon experience inexorably, giving rise to Euclid's postulates, for non-Euclidean geometries clearly showed that there were other logically possible frameworks for describing space. Naturally, the following questions were raised: What is it that has led us into

[79] De acordo com Ahlquist, essa frase foi utilizada pela primeira vez por Chesterton num conjunto de três colunas do jornal inglês "Daily News" em 1905.

> treating Euclidean geometry as intuitive; that is, why this form of sensibility rather than another? And among these geometries, which one is the true geometry?
> (…) Philosophers then naturally questioned whether the frameworks we impose upon experience or the 'pure' intuitions we possess were shaped by evolution, as in the case of physical and behavioral traits, meaning that they were not that pure after all.
> (…) Seeing the problems with founding mathematics on our forms of sensibility and the pure intuitions of these forms which are supposedly independent of experience, philosophers sought another basis on which they could ground mathematics. This led some philosophers like Gottlob
> Frege to reject Kant's position and attempt to reduce mathematical principles to principles of logic. Others, such as David Hilbert, held that mathematics was simply the study of formal systems whose principles are like the rules of a game (…). Still others were committed to intuitionism but sought to revise Kant's original position. Henri Poincaré was a member of the last group; he remained a Kantian and an intuitionist. Though Poincaré made significant changes in Kant's thought – concerning mostly the origin of geometry and form of space –he favored the Kantian concepts of synthetic a priori and pure intuition, which were usually rejected by the other schools. He accepted that there are propositions in mathematics that are synthetic and known a priori on the basis of a pure intuition, but as Janet Folina (…) writes, compared to Kant, "Poincaré's theory of the synthetic a priori is much more minimal" (…).Some philosophers, such as Warren Goldfarb, see Poincaré's intuitionism as a psychological account of mathematical thinking, and seem to ignore the Kantian side of his intuitionism. Although Poincaré wrote on the psychology of the mathematician, he nevertheless mentioned a pure intuition which is prior to all experience and which gives rise to mathematical reasoning (FOLINA e GOLDFARB apud AKÇAGÜNER, 2019, p.926-929).

Como aponta Akçagüner, Poincaré, não procurou defender Kant da perda de influência que ocorria em função da teoria de Darwin, e da geometria não-euclidiana.Mas, por outro lado, o intuicionismo defendido nos textos filosóficos de Poincaré nascia de uma resistência à ideia de que logicistas teriam refutado a filosofia da matemática de Kant. Segundo Goldfarb, em seus primeiros textos filosóficos dedicados à fundamentação da matemática:

> Poincaré seems particularly outraged at the logicists claim to have conclusively refuted Kant's philosophy of mathematics. Thus Poincare is moved to write in the area by a purely philosophical animus. No mathematical issues are on his mind; his concern is with general, philosophical claims about the nature of mathematics, and he is reacting to claims of this sort made by the partisans of the new logic (GOLDFARB, 1988,p.61).

Esse grupo da "nova lógica" era formado por aqueles que se debruçavam sobre as novas questões fundacionais para lógica, aritmética e geometria, e que, de certa maneira, gostariam de formalizar a linguagem matemática produzida até então através de ferramentas lógicas. Nesse grupo estariam incluídos Russell, Frege, Zermelo, Peano, Hilbert, e muitos outros. Poincaré via nessas tentativas de formalização uma certa "decadência" que tenderia a mal interpretar o papel da "intuição" dos matemáticos nos raciocíniosmatemáticos. Segundo Goldfarb, Poincaré

> (...) talks of intuition as that which guides the choice of conventions to adopt and of routes to

> take toward a proof. Intuition thus becomes merged with a notion of what might be called "mathematical sagacity." For here Poincare's concern is explicitly with thepsychologyofmathematicalthinking,withafacultyorskillthatenablesapersontore is a distinction between context of discovery (or invention) and context of justification, and that intuition in the broader sense pertains to the former whereas the logicists are concerned with the latter (GOLDFARB, 1988, p.64).

Para ele, essa *inventividade* dos matemáticos deveria levar a fundamentação da matemática numa direção diferente se comparado ao caminho tomado por logicistas e formalistas (embora não seja uma noção rigorosamente kantiana). Em suas próprias palavras, ele diz: "(...) it must be granted that mathematical reasoning has of itself a kind of creative virtue, and is therefore to be distinguished from the syllogism (POINCARÉ, 1905, p.3)". Afinal, segundo ele, silogismos não seriam capazes de descobrir nada além de tautologias, e, portanto, não seria capaz de dar conta das criações dos matemáticos.

De fato, Poincaré preferia uma fundamentação diferente para os fundamentos da matemática, e não tão formal. De acordo com Silva:

> A true critique of mathematical knowledge in the style of Kant was his aim, one which, according to him, logicists never reached because they didn't understand that reducing mathematics to logic only shifted the problem, and in place of the task of explaining mathematical knowledge we have now the task of explaining logical knowledge. With the extra burden of explaining the far from obvious assumption of why the latter is more fundamental than the former (SILVA, 1996, p.91).

Poincaré, de modo bastante radical, procurava deixar explícito que a analiticidade projetada na matemática pelos logicistas encontrava alguns problemas, como o *Paradoxo de Russell* (1902), porque o logicismo parecia estender desnecessariamente a fundamentação da matemática à lógica, e isso afastava os matemáticos de um caminho verdadeiramente mais fundamental.

Na perspectiva de Poincaré, os fundamentos da matemática tal como propunham os logicistas, sugeriam como base para a matemática a lógica "all the way down" exatamente como na história da "tartaruga fundamental"[80]. Em suas próprias palavras, Poincaré fala sobre a fundamentação logicista da seguinte maneira: "Syllogistic reasoning remains incapable of

[80]Essa história, segundo fontes ocidentais, faz parte da mitologia hindu, e representaria o mundo (ou mesmo o universo) sendo sustentado pelas costas de tartarugas, ou mesmo nas costas de mais outros animais. Na tradição filosófica ocidental essa mitologia encontrou popularidade também através de Bertrand Russell, e chega a ser encontrada na literatura filosófica ocidental da seguinte maneira: Russell was approached after a lecture, you may recall, by an elderly woman who assured him that he was quite wrong about the nature and origin of the world. It rests, she told him, on a turtle's back. And what, said Russell, does the turtle rest on? 'You can't catch me like that, Mr. Russell. It's turtles all the way down (CLARK, 2009, p.21).

adding anything to the data that are given it; the data are reduced to axioms, and that is all we should find in the conclusions"(POINCARÉ, 1905, p.2).

E essa ausência de conclusões fundamentais na fundamentação da matemática ocorria, para Poincaré, não só na lógica,mas, também na filosofia. Para ele, havia um impasse entre Kant e os logicistas, e ele expressava esse "impasse" como uma "contradição" que ocorre entre (1) a matemática ser reduzida asilogismos[81](como ele entende ocorrer no logicismo), e que poderia nos certificar de uma natureza puramente dedutiva da matemática, e (2) a matemática ser reduzida a verdades sintéticas a priori(como poderia ocorrer no kantismo). De modo que, nesse último caso, a matemática seria uma ciência "dedutiva", ou melhor, a priori, apenas aparentemente (como ele entende ocorrer com Kant). E, esse impasse estaria longe ainda de ser superado também pelo kantismo, pois, segundo ele, mesmo se "(...) the nature of the synthetic views had no longer for us any mystery, the contradiction would not have disappeared (POINCARÉ, 1905, p.2)".

Embora não seja claro como Poincaré sustenta especificamente essa declaração de que haveria um mistério na visão sintética, isto é, a visão de número (2), podemos encontrar uma concordância com Kant numa passagem já utilizada nessa dissertação. Nessa passagem, Kant assinala não ter produzido completamente uma fundamentação da matemática:

> Por isso não incluirei os princípios da matemática entre os meus princípios, mas apenas aqueles em que se fundam a priori a possibilidade e a validade objetiva dos mesmos e que, portanto, têm de ser vistos como princípio desses princípios. (KANT, 2015, p.187 / B199).

Diante dessas passagens (de Kant e Poincaré), podemos interpretar que Poincaré sugere que haveria ainda um desafio no kantismo (o que ele chama de mistério), que seria o de verificar que são juízos sintéticos a priori que se encaixam como os "princípios" da matemática. Ele não demonstra qual, ou mesmo quais, seriam os princípios da matemática capazes, por exemplo, de justificar a forma de cada expressão aritmética.Quanto a esse mistério (de quais seriam os juízos sintéticos a priori que fundariam a matemática), é possível que os ventos soprem numa direção com a qual Poincaré não simpatizava (numa direção estritamente analítica como ocorre na direção logicista); e ele mesmo, talvez estivesse ciente disso quando assinalava um impasse difícil de ser superado. Nesse impasse, pode ser que a perspectiva kantiana não seja tão oposta à de Frege como ele supunha. As perspectivas de

---

[81] Para Poincaré, "mathematical reasoning has of itself a kind of creative virtue, and is therefore to be distinguished from the syllogism" (POINCARÉ, 1905, p.3). Muito provavelmente, Poincaré entendia que a lógica de Frege ultrapassava em abrangência a lógica silogística; e, portanto, penso que o "silogismo" tenha sido mencionado aqui de forma provocativa.

Kant e Frege poderiam ser vistas como complementares uma vez que Kant, segundo ele mesmo, não completou, de fato, uma fundamentação da matemática. E, portanto, talvez seja possível preencher a *lacuna*[82] em que cabem os "princípios" da matemática pura na filosofia de Kant com fundamentos puramente analíticos (como sustenta Frege sobre o conceito de número, ou mesmo os próprios axiomas de Peano poderiam ser tomados também como esses "princípios"), mas que ainda suscitem implicações sintéticas (ou seja, esses fundamentos puramente analíticos seriam capazes, por exemplo, de produzir adiantamentos sobre o mundo empírico, mas não dependeriam dos objetos empíricos para sua definição, tal como poderíamos dizer ocorrer com os axiomas de Peano). Embora, também uma primeira dificuldade para essa alternativa de fundamentação seria o de saber se as noções fundamentais de espaço e tempo **não** poderiam ser acionadas de modo que a matemática também possa ser fundada através dessas noções.

3.3 Uma Sugestão de Poincaré

Já tendo visto algumas de suas críticas, e também um pouco do seu posicionamento intuicionista (tanto na seção 3.2 quanto na seção 1.3), veremos nesse subcapítulo que, por trás desse posicionamento, Poincaré constata a necessidade de uma abordagem sobre os fundamentos da matemática que fosse menos simbólica e mais "profunda", ou, se dito de outra maneira: com grande potencial de inferência sobre a natureza última de todo o raciocínio matemático.Essa sugestão de Poincaré aparece, por exemplo, quando ele comenta uma demonstração de Leibniz para a verdade da expressão "2 + 2 = 4" no primeiro capítulo de *Ciência e Hipótese* (1902). Mas, antes de expor esses comentários veremos outros de Frege, que coincidem muito com os de Poincaré sobre a mesma demonstração.

Frege entende que a demonstração de Leibniz seria insuficiente. E, inclusive, indica no título da seção §6 de *Os Fundamentos da Aritmética*(1893, 1903) que: "Leibniz's proof that 2 + 2 = 4 contains a gap (FREGE, 1980, p.vi)". Ele expõe a demonstração de Leibniz da seguinte maneira:

> It is not an immediate truth that 2 and 2 are 4, provided it be granted that 4 signifies 3 and 1. It can be proved, as follows:
>
> Definitions: 1) 2 is 1 and 1,

[82] Utilizei a palavra "lacuna", e com isso pode parecer que indiquei que falta algo no corpo teórico kantiano, mas não é isso que quis dizer. Pois, afinal, não parece que a tarefa de Kant na filosofia fosse fundamentar a matemática, ou a lógica; que são pretensões filosóficas de autores que viveram outros momentos na história da filosofia.

2) 3 is 2 and 1,

3) 4 is 3 and 1.

Axiom: If equal be substituted for equal, the equality remains.

Proof: 2 +2 = 2 + 1 + 1(by Def. 1) = 3 + 1 (by Def. 2) = 4 (by Def. 3).
∴ 2+2 = 4 (by the Axiom) (LEIBNIZ apud FREGE, 1980, p.7 / §6)[83].

Frege comenta que, nessa demonstração, todo número seria definido nos termos de seu predecessor embora não fique claro "how a number like 437986 could be given to us more aptly than in the way Leibniz does it" (FREGE, 1960, p.8 / §6); e também, para Frege, toda soma nessa demonstração seria definida por si mesma, o que não expressaria de fato o que significa uma operação de soma. De acordo com ele: "if we do not yet understand the meaning of a + b, we do not understand the expression a + (b + e) either (FREGE, 1960, p.8 / §6).

Já Poincaré,por sua vez, de modo muito semelhante, entende que a demonstração de Leibniz não compreende aspectos suficientemente gerais sobre o conhecimento matemático. E, por isso, ele compara essa demonstração a uma jogada coerente, mas que não fornece os fundamentos de todo um jogo. O comentário de Poincaré segue:

> The equality 2 + 2 = 4 can be verified because it is particular. Each individual enunciation in mathematics may be always verified in the same way. But if mathematics could be reduced to a series of such verifications it would not be a science. A chess-player, for instance, does not create a science by winning a piece. There is no science but the science of the general (POINCARÉ, 1905, p.4).

Como bem percebe Silva, Poincaré parece "concerned with the ultimate foundation of mathematical knowledge, its primary rational basis" (SILVA, 1996, p.99). E, portanto, para ele, a condução da filosofia da matemática deveria ser dada por uma filosofia que fizesse mais do que traduzir premissas para uma outra linguagem (sendo, por exemplo, "1 + 1" traduzidos em "2" na demonstração de Leibniz). Diz ele sobre a demonstração de Leibniz:

> It leads to nothing because the conclusion is nothing but the premisses translated into another language. A real proof, on the other hand, is fruitful, because the conclusion is in a sense more general than the premisses (POINCARÉ, 1905, p.4).

---

[83] Essa passagem, original de Leibniz, é informada também, de maneira muito semelhante, no texto de Poincaré *Ciência e Hipótese* (1902). E, embora eu não tenha conseguido encontrar o texto original de Leibniz, confiei que Poincaré e Frege tenham reproduzido o texto de Leibniz com total honestidade.

Apesar de muitos problemas envolverem essa demonstração de Leibniz, podemos apontar nela uma intuição intrigante, e também muito semelhante ao pensamento de Lipschitz que foi abordada por Frege em *OsFundamentos da Aritmética* (1893, 1903). Segundo Frege, esse pensamento seria: "Anyone who proposes to make a survey of a number of things, will begin with some one particular thing and proceed by continually adding a new one to those previously selected. (LIPSCHTIZ apud FREGE. 1980, p.33 / §26)".Contudo, segundo Frege, não conhecemos melhor os números por saber quantos deles existem. Frege comenta essa passagem citada acima dizendo que o pensamento de Lipschitz nos fornece a intuição de como formar uma constelação, mas não de como entender melhor o que é o número. Diz Frege:

> This seems to describe much better how we acquire say the intuition of a constellation than how we construct numbers. The intention to make a survey is not essential; for it will scarcely be maintained that it becomes any easier to survey a herd after we have learned how many head it comprises (FREGE. 1980, p.33-34 / §26).

Apesar de Frege rejeitar percepções como a de Leibniz e Lipschitz, isto é: a definição de número como uma mera redução de "um todo" em suas partes (Leibniz), ou do entendimento de número como uma soma de diferentes partes (Lipschitz), elas são percepções, de um ponto de vista histórico, que trazem um esquema capaz de evidenciar uma caracterização mobilista[84] dos números (então, oposta a alguns tipos de monismo[85]). O monismo clássico, i.e., a antiga noção de que o movimento, ou mesmo de que a divisibilidade do mundo seria uma ilusão, não parece se sustentar quando fornecemos uma demonstração coerente como a de Leibniz. Sua demonstração atesta, ao menos, a possibilidade de se definir um número como sucessor ou antecessor a outro. E, ao fazer isso, ele produz uma base suficiente para apontar que esses números detêm características singulares dentro da aritmética (ou seja, o mundo da aritmética seria divisível tal como mobilistas, e mesmo pluralistas[86] poderiam defender). E, assim, a demonstração de Leibniz, e também as ideias de

[84] O mobilismo, ao contrário de alguns tipos de monismo, defende que existem "mudanças", e que, por exemplo, o mundo poderia ser dividido em unidades distintas. Um dos mais antigos pensadores mobilistas foi Heráclito de Éfeso. Uma de suas ideias mais famosa foi a de que "you cannot step into the same river twice, for new waters are ever flowing in upon you" (BLACKBURN, 2005, p.164).

[85] Segundo Craig, monismo "is a very broad term, applicable to any doctrine which maintains either that there is ultimately only one thing, or only one kind of thing; it has also been used of the view that there is only one set of true beliefs (CRAIG, 2005).

[86] Segundo Craig, pluralismo "is a broad term, applicable to any doctrine which maintains that there are ultimately many things, or many kinds of thing; in both these senses it is opposed to monism" (CRAIG, 2005). Bertrand Russell, por exemplo, expressava sua postura pluralista da seguinte maneira: "I share the common-

Lipschitz, parecem evidenciar, ao menos, a diferenciação quantitativa e qualitativa dos números de modo que, por exemplo, alguns números podem ser considerados pares, ímpares, primos e etc[87]. E, mesmo que, como lembra Frege, os números na aritmética talvez possam **não**[88] exigir de seus antecessores (ou de outros números) uma relação de necessidade para melhor se definirem, essa possível "autonomia" apontada por Frege, contudo, só reforça a característica singular, diferenciada, de cada número. Esse tema da diferenciação (que discute se existem objetos independentes, extremamente distintos, e mesmo autônomos em suas respectivas definições) é o que Frege parece tomar como base para questionar sobre a autonomia de cada um dos números na definição de número natural de Leibniz. Isto é, quando ele pergunta se uma definição para o número 437986 só pode ser dada através da soma de seus predecessores. No entanto, quanto a esse questionamento sobre maior "autonomia para a definição de um número", poderíamos nos perguntar o seguinte:

- Se a relação entre os números não é necessária para a definição dos mesmos, deveriam, então, os números na aritmética ser definidos "um a um", i.e., separadamente?

Se fosse o certo fazer assim (defini-los separadamente), não deveríamos nem nos darmos ao trabalho de chamar todos eles de "números". Em resposta a esse problema Frege unifica todos os números naturais de duas formas: ele assinala os números naturais como objetos puramente analíticos, e, também, nas suas definições de cada um dos números naturais, sempre está contido o(s) antecessor(es) de cada um desses números(exceto na definição de zero, pois não há antecessores ao zero na ordem dos números naturais, e assim na definição desse número nenhum outro está contido, embora o zero esteja presente na definição de 1). Essa "união", ou generalidade na definição de Frege para os números naturais, portanto, até poderia ser compreendida como "profunda", ou "geral" (que são as exigências de Poincaré para a fundamentação da aritmética)[89]. Contudo, mesmo essas duas

---

sense belief that there are many separate things; I do not regard the apparent multiplicity of the world as consisting merely in phases and unreal divisions of a single indivisible Reality" (RUSSELL, 2010, p.2).

[87] Inclusive, o número 1729 (também conhecido como o número "Hardy-Ramanujan", ou o número "taxicab"), é um número bastante singular. Segundo Hardy, essa característica singular desse número foi alertada da seguinte maneira pelo matemático Ramanujan: "I remember once going to see him when he was ill at Putney. I had ridden in taxi cab number 1729 and remarked that the number seemed to me rather a dull one, and that I hoped it was not an unfavorable omen. 'No,' Ramanujan replied, 'it is a very interesting number; it is the smallest number expressible as the sum of two cubes in two different ways' (VEISDAL, 2019).

[88] Frege comenta que, na demonstração de Leibniz, todo número seria definido nos termos de seu predecessor embora não fique claro "how a number like 437986 could be given to us more aptly than in the way Leibniz does it" (FREGE, 1960, p.8 / §6)

[89] Que ele expressa, por exemplo, na seguinte passagem já citada anteriormente nessa seção: A real proof, on the other hand, is fruitful, because the conclusion is in a sense more general than the premisses (POINCARÉ, 1905, p.4)

“unificações” logicistas, teriam sido obtidas, segundo Poincaré, relacionando-se (ou mesmo, “traduzindo-se”) classificações lógicas com classificações lógicas “all the way down”[90]. E, portanto, Frege, segundo Poincaré, estaria assumindo um fraco poder de fundamentação das classificações lógica em sua definição dos números naturais, da mesma forma que Leibniz também estaria assumindo um poder de fundamentaçãoigualmente fraco[91]das operações de soma para a definição dos números naturais.

Para Poincaré, e essa talvez seja uma de suas análises mais importante, os conceitos a serem descobertos como mais fundamentais para a matemática deveriam ser menos simbólicos (não deveriam só participar de um jogo de tradução). E, inclusive, mesmo o esquema de Gödel (em que se relacionam, ou se “traduzem”, números na aritmética e frases lógicas) talvez possa ser entendido dessa maneira (como uma mera tradução); e, por esse motivo, por só promover uma tradução, que então o teorema estaria evidenciando ainda mais a carência de fundamentos para a matemática.

3.4 Resumo.

> *“A história, na medida em que está a serviço da vida, está a serviço de uma potência ahistórica e, por isso, nunca, nessa subordinação, poderá e deverá tornar-se ciência pura, como, digamos, a matemática”*(NIETZSCHE apud FREZZATTI, p.11, 2018)[92].

Para Poincaré, a matemática seria uma ciência “a serviço da vida”, ou, se dito de outra maneira, afetada pela criatividade “ahistórica” do homem (não seria uma ciência “pura” como Nietzsche parece entender). Nesse sentido, Poincaré deveria se perguntar: por que a matemática não seria determinada pela inventividade humana?Seriam todos os teoremas da aritmética (as questões importantes sobre a aritmética) deriváveis dos axiomas de Peano, ou da Teoria dos Tipos de Russell? Inclusive, de acordo com Gödel, em seu famoso artigo de 1931, é possível que não (a aritmética pode não ser inteiramente derivada dos axiomas de Peano ou da teoria de Russell), pois proposições ainda não percebidas pelo estado atual das pesquisas na aritmética poderiam contradizer as atuais proposições fundamentais da mesma.

[90]Como citado na seção anterior, Poincaré defende que, somente através de ferramentas lógicas, pouco poderia ser feito pela fundamentação da matemática. De acordo com ele, “Syllogistic reasoning remains incapable of adding anything to the data that are given it; the data are reduced to axioms, and that is all we should find in the conclusions (POINCARÉ, 1905, p.2)”.

[91]Como já citado anteriormente nessa seção, segundo Frege, na demonstração de Leibniz, “if we do not yet understand the meaning of a + b, we do not understand the expression a + (b + e) either (FREGE, 1960, p.8 / §6).

[92] Essa passagem aparece primeiro no texto *II Consideração extemporânea* (1874).

Sobretudo, Poincaré entende que a matemática progride quando ela desenvolve questões inovadoras e importantes. E, portanto, caso esse exercício não deixe de ser feito pelos matemáticos,**talvez**, ela, a aritmética, nunca deixe de ser "produzida". Mas, esse "talvez", e isso ele também nota, poderia deixar de ser um "talvez". Poincarévia tambémum "impasse",que ele chama de uma "contradição", na filosofia da matemática: por um lado, a aritmética poderia ser entendida como um sistema formal fechado sem necessariamente ter seus fundamentos atrelados a magnitudes concretas (como ele entende ocorrer em Frege), e assim a matemática poderia sim ser completamente resumida em algumas leis lógicas de inferência. E, por outro lado, aaritmética, assim como toda a matemática, para ele, poderia ser entendida como um sistema formal aberto e seus fundamentos seriam atrelados a magnitudes concretas (como ele entende ser possível em Kant); e, desse modo, a aritmética não seria uma ciência capaz de ser resumida em leis lógicas de inferência.

Além dessa leitura muito perspicazdo estado da arte da filosofia da matemática, vimos, nesse capítulo, que Poincarécontrapôs formalistas e logicistas ao defender que a lógica não poderia fazer muito pela fundamentação da matemática. Afinal, para ele,no assunto da fundamentação da matemática, a lógica só seria capaz de produzir "jogos de tradução": como do logiquês para a matemática e da matemática para o logiquês. E, como alternativa para esse "jogo de tradução", Poincaré entendia que seria mais importante para a fundamentação da matemática, investigar, discutir, propor ideias acerca da natureza do pensamento aritmético (e/ou, matemático).

CONCLUSÃO:

Nessa seção finaleu vou lembrar alguns pontos principais alcançados por essa dissertação, e então farei algumas considerações sobre o que foi dissertado até aqui.

No primeiro capítulo, sintetizei o que foram os antecedentes das três vertentes "clássicas" da crise dos fundamentos da matemática no início do século XX. Nesse mesmo capítulo, apresentei também essas três correntes "clássicas": logicismo, formalismo e intuicionismo. Sendo as correntes logicista e formalista mais próximas por recorrer apenas a recursos formais na fundamentação da matemática, e a corrente intuicionista seria a que mais recorre arecursos não formais (ou menos simbólicos) para fundamentar a matemática.

E, sobre os nomes proeminentesdessas três correntes, acredito ter indicado autores importantes, ainda que outros como Weiertrass, Cauchy e Bolzano, embora tenham sido mencionados, pudessemtambém ser apresentados de forma igualmente extensa. E inclusive, o mesmo ocorreu, penso eu, quando menciono lógicos como Boole[93], Schröder[94], De Morgan[95] e Peirce[96]. Quanto a essa "falta", acredito ao menos que o papel desses autores dentro da história das questões fundacionais da matemática não deixou de ter sido indicado; e, também, tomo essas "faltas", como parte um estilo objetivo, não tão enciclopédico e fatidioso, da escrita dessa dissertação.

Na primeira parte do capítulo 2, foi exposto como Frege é um nome importante do processo em que a lógica protagonizava projetosde fundamentação da matemática.Mencionei,inclusive, nesse capítulo que o filósofo alemão dirigiu comentários muito sagazes a Mill, Kant e aos psicologistas, no sentido de rejeitar a importância de "magnitudes concretas" para a filosofia da matemática. Frege, ao contrário dessesoutros, defendia que a natureza do raciocínio matemático seria puramente analítica, e ele sustentava essa posição estabelecendo uma forma diferente de distinguir proposições sintéticas e analíticas (isto é, diferente de Kant). Para Frege "(...) these distinctions between a priori and a posteriori, synthetic and analytic, concern (…) not the content of the judgement but the justification for making the judgement" (FREGE, 1980, §3 / p.3). Ou seja, para ele, a matemática seria uma ciência autônoma, que não precisa procurar por correspondências físicas para cada um de seus entes (como Mill defende). Contudo, termino o capítulo com a sugestão de que essa posição de Frege não esgotou a possibilidade de se investigar ainda o conteúdo (a natureza última) do raciocínio matemático. Ou seja, "formas puras da

---

[93] Segundo Augustyn, George Boole foi um "English mathematician who helped establish modern symbolic logic and whose algebra of logic, now called Boolean algebra, is basic to the design of digital computer circuits (AUGUSTYN, 2020)".

[94] Segundo, Burris e Legris, "The German mathematician Ernst Schröder played a key role in the tradition of the algebra of logic. A good example was his challenge to Peirce to provide a proof of the distributive law, as one of the key equational properties of the algebras with two binary operations (BURRIS e LEGRIS, 2018)".

[95] Segundo Augustyn, Augustus De Morgan foi um "English mathematician and logician whose major contributions to the study of logic include the formulation of De Morgan's laws and work leading to the development of the theory of relations and the rise of modern symbolic, or mathematical, logic (AUGUSTYN, 2020)".

[96] De acordo com Belluci, "Charles Sanders Peirce (1839-1914) was an accomplished scientist, philosopher, and mathematician, who considered himself primarily a logician. His contributions to the development of modern logic at the turn of the 20th century were colossal, original and influential. Formal, or deductive, logic was just one of the branches in which he exercized his logical and analytical talent. His work developed upon Boole's algebra of logic and De Morgan's logic of relations. He worked on the algebra of relatives (1870-1885), the theory of quantification (1883-1885), graphical or diagrammatic logic (1896-1911), trivalent logic (1909), higher-order and modal logics. He also contributed significantly to the theory and methodology of induction, and discovered a third kind of reasoning, different from both deduction and induction, which he called abduction or retroduction, and which he identified with the logic of scientific discovery (BELLUCI e PIETARINEN, 2020)".

sensibilidade”, ou mesmo outras formas de relacionar noções empíricas a fundamentação da matemática poderiam ainda ser acionadas.

Já nas seções2.2, 2.2.1 e 2.2.2, por sua vez, foi apresentada a leitura de Dummett sobre o projeto fregiano. Nessasseções,questionei se uma defesa do “problema Júlio César” implicaria de fato em uma contradição grave na argumentação de Frege. E, diante do exposto nessa parte, penso que, talvez, essa defesa do “problema Júlio César” seja na verdade uma resistência, por vezes mal justificada (pois se prende apenas a primeira parte da argumentação de Frege) e não explícita (evita um aprofundamento), quando trata da*Teoria dos Conjuntos*(1874); e que essa resistência seria autorizada, principalmente, devido ao surgimento do *Paradoxo de Russell* (1902), que foi o que realmente levou primeiro o projeto logicista à suspeição.

Sobretudo, não só nessas seções (2.2, 2.2.1 e 2.2.2), mas ao longo de toda a dissertação, fiztambém algumas sugestões para ajudar a pensar sobre leituras como a de Barco, ou Dummett (isto é, que parecem rejeitar a participação da teoria de Cantor na fundamentação da matemática). Essas sugestões são: que Frege seria bem defendido dessas leituras fazendo-se uma defesa da *Teoria dos Conjuntos*(1874), ou reinterpretando o *Paradoxo de Russell* (1902). Ambas as alternativas foram sugeridas sempre que possível nessa dissertação, como quando menciono os trens de Sendai, ou a polêmica que envolve a obra *Remarks on the Foundations of Mathematics* (1956) de Wittgenstein. Essas sugestões, contudo, não foram trabalhadas de forma central no texto dessa dissertação. Foramincluídas apenas pontualmente no texto dessa dissertação defender a teoria de Cantor e/ou reinterpretar o paradoxo de Russell.

No capítulo 3, em ordem de evidenciar o peso de alguns escritos filosóficos de Poincaré, expus algumas passagens, quais, ao meu ver, melhor expressam a pertinência desse autor no estado atual da artena fundamentação da matemática deixado pelas três correntes clássicas. Nesse último capítulo da dissertação, e esse sim era um objetivo último dessadissertação, procurei sublinhar que existem, nos textos filosóficos de Poincaré, considerações valiosas a respeito da suspensão do logicismo e do formalismo na fundamentação da matemática. Sendo essas considerações sobre as classificações predicativas, a questão do infinito na lógica, e necessidade de se pensar em princípios gerais o suficiente (com grande poder de inferência) para todo o raciocínio matemático.

Sobre essa última sugestão de Poincaré, embora eu não tenha escrito muito sobre um assunto que levantei, i.e, sobre o papel domonismo e do mobilismo nas concepções de número na filosofia da matemática, acredito que esse assunto final seja muito esclarecedor. Tratar dessas vertentes históricas da epistemologia me parece satisfazer, inclusive, as sugestões de Poincaré sobre os fundamentos da matemática (assim como indicado ao final desse capítulo). Penso, inclusive, e aqui convido o leitor a refletir comigo, que o monismo e o mobilismo são questões fundamentais na área da fundamentação da matemática (e, não somente na epistemologia clássica). Afinal, não me parece que podemos conceber um raciocínio dedutivo na matemática tratando apenas de uma unidade. Números naturais como 0 ou 1 espelham, por exemplo, cada um deles, uma dificuldade de se deduzir a partir somente desses números (se tomados isoladamente). Ou seja, esses números, isoladamente, não parecem estabelecer nenhum processo dedutivo em cima de seu valor quantitativo (diferente de unidades maiores que são passíveis, por exemplo, de divisão). Portanto, de certa maneira, parece ser preciso alguma forma de diferenciação para se estabelecer qualquer tipo de relação, ou operação (seja essa relação, por exemplo, de tempo ou espaço, de soma, divisão ou subtração, e etc). E, portanto, a multiplicidade, por sua vez, tão fácil de ser verificada (inclusive na matemática), poderia servir como um argumento que viria a sustentar visões sintéticas da filosofia da matemática de tal modo que a mesma (a multiplicidade) seria definitiva também para a possibilidade das proposições analíticas. Pois, afinal, vejamos a seguinte questão: seria possível correr qualquer informação no mundo caso o mundo não fosse “divisível”? Para existir um triângulo (com todas as suas características), é preciso que o mesmo seja divisível em 3 pontas, 3 lados e etc. E, portanto, a multiplicidade (ou, divisibilidade) me parece ser algo extremamente fundamental para as proposições analíticas também. Essa multiplicidade seria então tão fundamental que só poderíamos, inclusive, dizer que o raciocínio matemático é possível a partir do número 2, por exemplo. Pois, afinal, seria a partir desse número que então poderíamos começar a deduzir operações básicas da matemática como de soma, subtração, multiplicação e etc. O número 2, inclusive, seria o único número capaz de representar a existência de dois entes iguais (iguais em valor, mas não em localização no espaço), ou de dois diferentes, e consequentemente, capaz de representar a multiplicidade.

Referências Bibliográficas:

AGUIAR, T. *Frege e a Ontologia dos Números*. Rev. Síntese: Revista de Filosofia Vol.37, p.187-196, (2010).

AHLQUIST, D. *Lecture 83: The Man Who Was Orthodox*.Disponível em:< https://www.chesterton.org/ >. Acesso em: 11 de Setembro de 2020.

AKÇAGÜNER, K. *Intuition in Poincaré's Philosophy of Mathematics*. Rev. Beytulhikme Int. J. Phil. Vol. 9, No. 4, p.925-940, (2019).

ARDESHIR, M. e MARTIN-LÖF, P.; et al. *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007): The Cerisy Conference*. Ed. Birkhäuser. Berlin, 2008.

ARISTOTLE., e BARNES, J. *The Complete Works of Aristotle: The Revised Oxford Translation Volume 1*. Ed. Princeton University Press. Princeton, 1991.

ARISTOTLE., e BARNES, J. *The Complete Works of Aristotle: The Revised Oxford Translation Volume 2*. Ed. Princeton University Press. Princeton, 1991.

ATTEN, M. *The Development of Intuitionistic Logic*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

AUGUSTYN, A.; BAUER, P., et al. *Richard Dedekind: German Mathematician.*Encyclopedia Britannica. Disponível em: <www.britannica.com>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2020.

AUGUSTYN, A.; BAUER, P., et al.*Augustus De Morgan*. Encyclopedia Britannica. Disponível em: <www.britannica.com>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2020.

AUGUSTYN, A.; BAUER, P., et al.*George Boole*. Encyclopedia Britannica. Disponível em: <www.britannica.com>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2020.

BALAGUER, M. *Platonism in Metaphysics*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

BANDEIRA, A. *Princípio De Hume: Possibilidade De Uma Filosofia (Neo) Fregeana Da Aritmética?* Tese (dissertação de Mestrado em Filosofia) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2004.

BANDEIRA, A. *Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege*. Tese (dissertação de Doutorado em Filosofia) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2009.

BARCO, A. *On Mathematical Truth: Wittgenstein and the dissolution of Benacerraf's dilema*. Ed. University of Southhampton, Southhampton, 2018.

BAZYLEV, V. *Hilbert System of Axioms*. Encyclopedia of Mathematics. Disponível em: <www.encyclopediaofmath.org>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2020.

BELLUCI, F.; PIETARINEN, A. *Charles Sanders Peirce*. Internet Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: <https://iep.utm.edu/>. Acesso em: 10 de agosto de 2020.

BERTRAND, R. *Philosophical Essays*. Ed. George Allen & Unwin Ltd. London, 1910.

BIRD, A. *Thomas Kuhn*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

BLACK, M. *The Nature of Mathematics*. Ed. The Humanities Press, NewYork, 1950.

BLACKBURN, S. *The Oxford Dictionary of Philosophy*. Ed. Oxford University Press. Oxford, 2005.

BOOLOS, G. e CLARK, P. *Basic Law (V)*. Rev. Proceedings of the Aristotelian Society: Supplementary Volumes Vol.67, p.213-249, (1993).

BOYER, C. e MERZBACH, U. *A History of Mathematics*. Ed. John Wiley & Sons. New Jersey, 2011.

BROUWER, L.; HESSELING, D. et al. *Gnomes in the Fog: The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*. Ed. Springer. Darrigol, 2003.

BROUWER, L. *Intuitionism and Formalism*. Rev. Bulletin of the American Mathematical Society Vol.20, p.81–96, (1912).

BROUWER, L. *Luitzen Egbertus Jan Brouwer Collected Works, Vol. 1: Philosophy of Mathematics*. Ed. North-Holland Publishing Company. Oxford, 1975.

BROUWER, L. *Luitzen Egbertus Jan Brouwer Collected Works, Vol. 2: Geometry, Analysis, Topology and Mechanics*. Ed. North-Holland Publishing Company. Oxford, 1976.

BURRIS, S.; LEGRIS, J. *The Algebra of Logic Tradition*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

CANTOR, G. *On a Property of the Class of all Real Algebraic Numbers*. Rev. Crelle’s Journal for Mathematics, Vol. 77, p. 258–262, (1874).

CARNAP, R. *The Logical Syntax of Language*. Ed. Kegan, Paul, Trench, Trubner & Co. Londres, 1937.

CARUS, A. e LEITGEB, H. *Rudolf Carnap*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

CHAITIN, G. *How Real Are Real Numbers?* Rev. International Journal of Bifurcation and Chaos. Vol. 16, No. 6, p.1841-1848, (2006).

CLARK, S.; CORNWELL, J.; MCGHEE, M.; et al. *Philosophers and God: At the frontiers of faith and reason.* Ed. Continuum. New York, 2009.

COOPER, N. *The Law of Excluded Middle*. Rev. Mind. Vol. 87, No. 346, p.161-180, (1978).

CRAIG, E.; DETLEFSEN, M.; PAGIN, P. et al. *The Shorter Routledge Encyclopedia of Philosophy*. Ed. Routlegde. New York, 2005.

DUIGNAN, B. *Willard Van Orman Quine*. Encyclopedia Britannica. Disponível em: < www.britannica.com >. Acesso em: 18 de junho de 2020.

DUMMETT, M. *Frege:Philosophy of Language*. Ed. Harper & Row, Publishers, New York, 1973.

DUMMETT, M. *Frege:Philosophy of Mathematics*. Ed. Duckworth. London, 1991.

EBBINGHAUS, H. e ZERMELO, E. *Ernst Zermelo Collected Works*. Ed. Springer. New York, 2010.

ENDERTON, H. *Axiom of choice*. Encyclopedia Britannica. Disponível em: <www.britannica.com>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2020.

FLOYD, J., PUTNAM, H. *A Note on Wittgenstein's 'Notorious Paragraph' about the Gödel Theorem*. The Journal of Philosophy Vol. 97, p.624–632, (2000).

FOLINA, J. P*oincaré's Philosophy of Mathematics*. Internet Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: <https://www.iep.utm.edu>. Acesso em: 14 de Abril de 2020.

FOLKERTS, M.; et al. *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*. Ed. Birkhäuser Verlag. Boston, 2002.

FREGE, G. *Begriffsschrift*. Ed. Georg Olms Verlagsbuchhandlung Hildesheim. Zürich, 1964.

FREGE, G. *Conceptual Notation and related articles*. Ed. Oxford University Press. Oxford, 2000.

FREGE, G.; HILBERT, D. et al. *Gottlob Frege: Philosophical and Mathematical Correspondence*. Ed. The University of Chicago Press. Chicago, 1980.

FREGE, G. *The Basic Laws of Arithmetic*. Ed. University of California Press. Los Angeles, 1982.

FREGE, G. *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concep of number*. Ed. Harper Torchbooks. New York, 1980.

FREZZATTI, W. *As noções de história na II Consideração Extemporânea e em Humano, demasiadohumano*. Rev. Cadernos Nietzsche Vol. 39, (1), p.9-30, (2018).

GLOCK, H. *A Wittgenstein Dictionary*. Ed. Basil Blackwell. Oxford, 1996.

GÖDEL, K. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Ed. Dover Publications. New York, 1992.

GÖDEL, K. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Ed. Princeton University Press. New Jersey, 1940.

GOLDSTEIN, R. *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel*. Ed. W. W. Norton & Company. New York, 2005.

GOLDFARB, W. *Poincaré against the logicists. History and philosophy of modern mathematics*. Rev. Minnesota studies in the philosophy of science. Vol. 11, p. 61–81, (1988).

GRAY, J. *Henri Poincaré*. Encyclopedia Britannica. Disponível em: < www.britannica.com >. Acesso em: 14 de abril de 2020.

GRATTAN-GUINNESS, I. *The Search for Mathematical Roots: (1870-1940)*. Ed. Princeton University Press. New Jersey, 2000.

HECK, R. *Critical Notices*. Rev. The Philosophical Quarterly Vol.43, Pages 223–233, (1993).

HECK, R. *Reading Frege's Grundgesetze*. Ed. Oxford University Press. Oxford, 2012.

HERIVEL, J. *Christiaan Huygens*. Encyclopedia Britannica. Disponível em: < www.britannica.com >. Acesso em: 30 de março de 2020.

HOAD, T. *The Concise Oxford Dictionary of English Etymology*. Ed. Oxford University Press. Oxford, 1996.

HOSCH, W. *Incompleteness Theorem*. Encyclopedia Britannica. Disponível em: < www.britannica.com >. Acesso em: 16 de Junho de 2020.

HORSTEN, L. *Philosophy of Mathematics*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. Ed. Vozes. São Paulo, 2015.

KENNY, A. *Frege: An Introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy*. Ed. Blackwell. Oxford, 1995.

KOELLNER, P. *The Continuum Hypothesis*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: <www.plato.stanford.edu>. Acesso em: 16 de Junho de 2020.

KREISEL, G. *Hilbert's Programme*. Dialectica Vol. 12, p.346-372. New Jersey, 1958.

KRONECKER, L. et al. *From Kant to Hilbert*: *A Source Book in the Foundations Mathematics Vol. II*. 2007. Ed. Clarendon Press. Oxford, 2007.

LAMPERT, T. *Wittgenstein and Gödel: An Attempt to Make Wittgenstein's Objection Reasonable*. Rev. Philosophia Mathematica Vol. 26, (3), p.324–345, (2017).

LEIBNIZ, G. W. *Gottfried Wilhelm Leibniz Philosophical Papers and Letters*. Ed. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1989.

LINDSTRÖM, S. e PALMGREN, E. e SINACEUR, H. B. et, al. *Logicism, intuitionism, and formalism*: *What has become of them?* Ed. Springer, 2019.

LUCE, L. *Frege on Cardinality*. Rev. Philosophy and Phenomenological Research Vol.48, p.415-34, (1988).

MACHADO, A. *Frege, Psicologismo e o Problema da Linguagem Privada*. Rev. Barbarói Vol.26, p. 55-66, (2007).

MACLEOD, C. J*ohn Stuart Mill*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

MILL, J. S. *System of Logic*. New York: Ed. Harper, 1874.

MORA, F. *Dicionário de Filosofia: Tomo I (A-K)*. Ed. Sudamericana. Buenos Aires, 1965.

MURPHY, B. *Michael Dummett (1925—2011)*. Internet Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: <www.iep.utm.edu>. Acesso em: 25 de Janeiro de 2020.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. *Gödel's Proof*. Ed. New York University Press. New York, 2001.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. *A Prova de Gödel*. Ed. Perspectiva. São Paulo, 2015.

NETO, F. *Prefácio ao Begriffsschrift (1879) de Gottlob Frege (1848-1925): Tradução e Introdução ao Texto*. Revista Brasileira de História da Matemática Vol. 8, p.123-141. Ed. Sociedade Brasileira de História da Matemática. São Paulo, 2008.

O'CONNER, J. ROBERTSON, E. *Leopold Kronecker*. MacTutor History of Mathematics Archive. Disponível em: < www.mathshistory.st-andrews.ac.uk >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

PLACEK, T. *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity*. Ed.Springer. Dordrecht, 1999.

POINCARÉ, H. *A Ciência e a Hipótese*. Ed. Universidade de Brasília. Brasília, 1988.

POINCARÉ, H. La Science et l'Hypothèse. Ed. Ernest Flammarion. Paris, 1917.

POINCARÉ, H. *Science Hypothesis*. Ed. Walter Scott Publishing Corporation. New York, 1905.

POINCARÉ, H. *Science and Method.* Ed. Thomas Nelson and Sons. New York, 1914.

RECK, E. *Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

RIBENBOIM, P. *The Book of Prime Numbers Records*.Ed. Springer. Londres, 1995.

RODYCH, V. *Misunderstanding Gödel: New Arguments about Wittgensteinand New Remarks by Wittgenstein*. Rev. Dialectica Vol. 57, No 3, p. 279-313, (2003).

RUSSELL, B. *The Philosophy of Logical Atomism*. Ed. Routledge. London, 2010.

SCHIRN, M. *Frege's Philosophy of Geometry*. Rev. Synthese Vol.196, p.929–971, (2017).

SEGRE, M. *Peano, Logicism, and Formalism*. Rev. Boston Studies in the Philosophy of Science Vol. 161.p.133-142, (1995).

SILVA, J. *Poincaré On Mathematical Intuition: a phenomenological approach to Poincaré's philosophy of arithmetic*. Rev. Philosophia Scitiae. Vol. 1, No. 2, p.87-99, (1996).

SUPPES, P. et al. *Studies in the Methodology and Foundations of Science*. Ed. Springer. Dordrecht, 1969.

STEWART, I.; STILLWELL J. C. *Analysis*. Encyclopedia Britannica. Disponível em: < www.britannica.com >. Acesso em: 30 de março de 2020.

SUTHERLAND, D. *Kant's Philosophy of Mathematics and the Greek Mathematical Tradition*. Rev. The Philosophical Review Vol. 113, No. 2, p.157-201, (2004).

TAIT, W.; et al. *Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons*. Ed. Cambridge University Press. Cambridge, 2007.

VÄÄNÄNEN, J. *Second-order and Higher-order Logic*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.

VEISDAL, J. *The Hardy-Ramanujan number 1729*. Medium. Disponível em: <https://medium.com>. Acesso em: 30 de Março de 2020.

VIERO, A. *Sistemas Axiomáticos Formalizados: a questão da desinterpretação e da formalização axiomática*. Ed. CLE/Unicamp. Campinas: 2011.

WHITEHEAD, A. e RUSSELL, B. *Principia Mathematica*. Ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

WITTGENSTEIN, L. *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Ed. The MIT Press. Massachusetts, 1985.

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Ed. Routledge. New York, 2001.

ZELLER, E. *Outlines of the History of Greek Philosophy*. Ed. Henry Holt and Company. New York, 1889.

ZARCH, R. *Hilbert's Program*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: < www.plato.stanford.edu >. Acesso em: 30 de Março de 2020.